<u>Unidad 1</u>: El conjunto de los números reales

- El conjunto de los números naturales está formado por aquellos números que se utilizan para contar.
  IN = {1, 2, 3, 4,……} IN_0 = {0, 1, 2, 3, 4,……}

- El conjunto de los números enteros (Z) está formado por la unión del conjunto de los números naturales con el cero (IN_0) y el conjunto de los números enteros negativos (Z^-) compuesto por los opuestos de los números naturales.
  Simbólicamente: $Z = IN_0 \cup Z^- = \{\ldots,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$

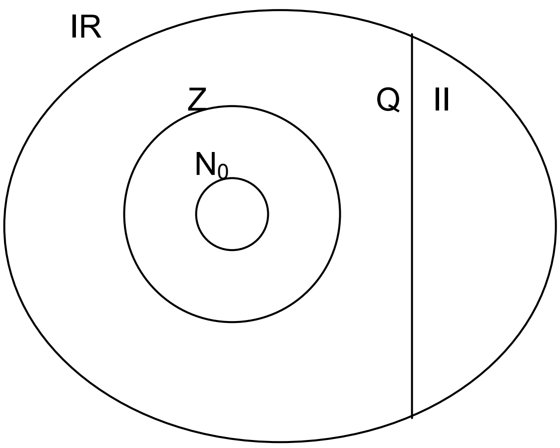
- El conjunto de los números racionales (Q) se compone por todos los números que pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros. Simbólicamente:
  $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$

  Los números enteros son racionales pues si a є Z puede representarse como $\frac{a}{1}$ entonces $Z \subset Q$.
  Un mismo número racional admite infinitas formas de representación, algunas como fracción, otras en forma decimal.
  Ej: $\frac{5}{3} = 1,\hat{6} = \frac{50}{30} = 1,5\hat{9} = \frac{10}{6} = \frac{-5}{-3} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = 0,25 = 0,25\hat{0} = 0,24\hat{9} = \ldots..$
  $-9 = \frac{-9}{1} = \frac{18}{-2} = -9,\hat{0} = -8,\hat{9} = \ldots\ldots$

  <u>Pero</u> la expresión decimal de un número racional tiene una cantidad finita de cifras decimales significativas o es periódica.

- El conjunto de los números irracionales (II) tiene por elementos a todos aquellos números que NO pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros por tener infinitas cifras decimales no periódicas.
  Ej: $\sqrt{2}, e, \sqrt[3]{-5}, \pi, 0,123456789101112\ldots..$

- El conjunto de los números reales (IR) está formado por la unión del conjunto de los racionales con el conjunto de los irracionales.
  Simbólicamente: IR = Q U II



<u>Operaciones en IR</u>: propiedades más usuales

Si a, b, c son números reales, entonces:

- a+b = b+a (la suma es conmutativa)
- a.b =b.a (el producto es conmutativo)
- a(b+c) = ab+ac (el producto es distributivo respecto a la suma)
- (a+b)+c = a+ (b+c) (la suma es asociativa)
- (ab)c = a(bc) (el producto es asociativo)
- $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; c ≠ 0 (el cociente es distributivo respecto a la suma)
- El 0 es el elemento neutro de la suma pues a+0 = 0+a = a
- El 1 es el elemento neutro de la multiplicación pues a.1 = 1.a = a
- -a es el inverso aditivo u opuesto de todo n° real pues a+(-a) = -a+a = 0
- $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de todo n° real a ≠ 0 pues: $a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$

<u>Potenciación</u>

- $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots a}_{\text{n veces}}$ si a є IR, a≠0, n є IN
- Potencia de exponente cero: $a^0 = 1$
- Potencia de exponente negativo: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

<u>Propiedades de la potenciación</u> (a є IR, a ≠ 0, m,n є Z)

- Potencia de otra potencia: $(a^n)^m = a^{n.m}$
- Producto de potencia de igual base: $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Distributividad respecto de la multiplicación: $(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$
- Distributividad respecto de la división: $(a : b)^n = a^n : b^n$, b ≠ 0
- NO es distributiva respecto a la suma ni a la resta: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$
  Casos particulares: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

<u>Radicación</u>

$\sqrt[n]{a}=b$ (se lee: raíz enésima de a)
n se llama *índice* y cumple: n є IN, n > 1; a se llama *radicando* y b se llama *raíz*

- Para n par y a є IR^+ U {0}: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n = a \;\; y \;\; b \geq 0$
- Para n impar y a є IR: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n = a$
- Potencia de exponente racional:

  Si a є IR, a ≥ 0, m, n є IN $\Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

<u>Propiedades de la radicación</u>

Son análogas a las de la potenciación. Si a,b є IR, m,n є IN

- Raíz de raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

- Distributividad respecto de la multiplicación: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- Distributividad respecto de la división: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, b ≠ 0
- Simplificación de índices: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$ (siendo r є IN un divisor común entre m y n).
- Eliminación del radical: $\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow n \;\; es \;\; impar$

  $\sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow n \;\; es \;\; par$
- Amplificación de índices: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$, para p є IN

Aproximaciones

Cada vez que se utiliza un valor aproximado de un número, se está cometiendo un error. Se puede *truncar* o *redondear* la última cifra que se desee, pero conviene *redondear*, ya que el error cometido siempre es menor o igual que al truncar.

Regla para redondear:

- Si la primera cifra a eliminar es menor que 5, se suprimen todas las cifras a partir de ella.
- Si la primera cifra a eliminar es mayor o igual que 5, se le suma 1 a la cifra anterior.

Ej: Para aproximar el número $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714.........$ con 4 cifras decimales (lo cual se puede indicar simbólicamente: $\varepsilon < 0{,}0001$) se obtiene como resultado $\frac{2}{7} \cong 0{,}2857$ tanto redondeando como truncando. En cambio, si se quiere aproximar con $\varepsilon < 0{,}001$, es decir con 3 cifras decimales, al redondear se obtiene como resultado $\frac{2}{7} \cong 0{,}286$ y al truncar $\frac{2}{7} \cong 0{,}285$

Porcentaje

Una fracción cuyo denominador es 100 expresa un porcentaje o tanto por ciento.

Ej: $\frac{37}{100} = 0{,}37 = 37\%$

Se presentan distintos tipos de *problemas* dependiendo de cuál es la incógnita.

- ¿Qué tanto por ciento es 26 de 40?

Rta: $\frac{26}{40} = 0{,}65 = \frac{65}{100} = 65\%$

- Para calcular un porcentaje *de* una cantidad "a", por ejemplo su 12% se debe resolver:
  12% . a o también 0,12 . a
- Para encontrar un número "x" tal que su 40% sea 2:

  40% . x = 2 o sea $\frac{40}{100}.x = 2 \Rightarrow x = \frac{200}{40} = 5$

Notación científica

Para escribir un número en notación científica se lo expresa de la forma $r.10^n$ donde "r" es un número decimal con valor absoluto mayor o igual que 1 y menor que 10 y "n" es un número entero.

Ej: El número 1230000000 escrito en notación científica da por resultado $1{,}23.10^9$
El número 0,000003 escrito en notación científica resulta igual a 3.10^{-6}

Igualdades en IR. Ecuaciones

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A los símbolos o letras que aparezcan se los denomina *incógnitas.*

  Ej: $5(x - 2) = 4{,}5x + 9$

- *Resolver* una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Para ello, se aplican propiedades y/o se realizan pasajes de un miembro a otro de la igualdad. Con esos valores se forma el conjunto solución "S" de la ecuación.

  Ej: para resolver la ecuación anterior, se aplica propiedad distributiva en el primer miembro de la igualdad, obteniendo $5x-10 = 4{,}5x+9$. A continuación se hacen pasajes de términos para escribir en un miembro de la igualdad los términos que contiene la incógnita y en el otro miembro los que no la tienen: $5x - 4{,}5\,x = 9 + 10$. Ahora, resolviendo en cada miembro: $0{,}5\,x = 19$. Nuevamente se realiza un pasaje (0,5 se pasa dividiendo) llegando así al valor de x que verifica la igualdad: $x = 38$, por lo tanto $S = \{38\}$

- Dos o más ecuaciones son *equivalentes* cuando tiene el mismo conjunto solución.

  Ej: la ecuación $x - 10 = 28$ es equivalente a la anterior porque su conjunto solución es el mismo: $S = \{38\}$

Propiedades sobre igualdades

- Si $a = b \Rightarrow a+c = b+c$
- Si $a = b \Rightarrow a.c = b.c$
- Si $a = b$ y $c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
- Si $a \,.\, b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$

- Las ecuaciones se clasifican de la siguiente forma:
  - Cuando una igualdad es cierta para *algunos* valores de la incógnita, entonces es una ecuación **compatible determinada**.

  Ej: $3x = 15$ $x.(x-3) = 0$
  $x = 5$ $x = 0$ ó $x-3 = 0$
  $S = \{5\}$ $S = \{0; 3\}$

  - Cuando una igualdad es cierta para *todos* los valores de la incógnita, entonces es una ecuación **compatible indeterminada**.

  Ej: a) $0x = 0$ b) $5.(x+2) = 5x+10$
  Cualquier x por 0 da 0 $5x+10 = 5x+10$
  $S = \{x \in IR\}$ $0x = 0$
  $S = \{x \in IR\}$

  - Si una igualdad no tiene soluciones, entonces es una ecuación **incompatible**

  Ej: a) $0x = 8$ b) $4x+3 = 4.(x-2)$
  Ningún x por 0 da 8 $4x+3 = 4x-8$
  $S = \{\,\}$ $0x = -11$
  $S = \{\,\}$

Desigualdades en IR. Inecuaciones

- Entre dos números reales cualesquiera "a" y "b" se cumple:
  $a < b$ ó $a > b$ ó $a = b$

- Una *inecuación* es una relación de orden (menor, menor o igual, mayor, mayor o igual) entre dos expresiones algebraicas.
- *Resolver* una inecuación significa hallar, si existe, el conjunto "S" de valores de la incógnita para el cual es cierta la desigualdad.
- Los **intervalos reales** son otra manera de expresar conjuntos de números descriptos por desigualdades. Si a, b є IR y a < b se definen:

Nombre	**Not. De intervalo**	**Notación de conjunto**	**Expresión coloquial**	**Representación gráfica**
Intervalo abierto	(a , b)	{x є IR/ a<x<b}	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b, sin incluir sus extremos	$\longrightarrow (\quad) \longrightarrow$ a b
Intervalo cerrado	[a , b]	{x є IR/ a≤x≤b}	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyendo sus extremos	$\longrightarrow [\quad] \longrightarrow$ a b
Intervalos semiabiertos	1) [a , b) 2) (a , b]	{x є IR/ a≤x<b} {x є IR/ a<x≤b}	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluyendo uno de sus extremos	$\longrightarrow [\quad) \longrightarrow$ a b $\longrightarrow (\quad] \longrightarrow$ a b
Intervalos infinitos	1)(a , +∞) 2)[a , +∞) 3)(-∞ , b) 4)(-∞ , b] 5)(-∞ , ∞)	{x є IR/ x>a} {x є IR/ x≥a} {x є IR/ x<b} {x є IR/ x≤b} {x є IR}	1)2) Conjunto de n° reales mayores o mayores o iguales que a. 3)4) Conjunto de n° reales menores o menores o iguales que b	$\longrightarrow (\longrightarrow$ a $\longrightarrow [\longrightarrow$ a $\longrightarrow) \longrightarrow$ b $\longrightarrow] \longrightarrow$ b $\longrightarrow$

<u>Propiedades importantes al resolver inecuaciones</u>

- Si a < b $\Rightarrow$ a+c < b+c $\forall$ c є IR
- Si a < b $\Rightarrow$ a.c < b.c $\forall$ c є IR^+
- Si a < b $\Rightarrow$ a.c > b.c $\forall$ c є IR^-

Válidas para <, ≤, >, ≥

Ej: a) $\frac{1}{2} - 5x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow -5x \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq 1 : (-5) \Rightarrow x \leq -0,2 \Rightarrow$ **(-∞; -0,2]**

b) (x-1).(x+9)< 0
Para que un producto sea negativo (o menor que 0) hay dos posibilidades: -que el primer factor sea positivo y el segundo negativo ó
-que el primer factor sea negativo y el segundo positivo

x-1 > 0 y x+9 < 0 ó x-1 < 0 y x+9 > 0
x > 1 y x < -9 ó x < 1 y x > -9
S_1 = (1,+∞) ∩ (-∞,-9) = { } ó S_2 = (-∞,1) ∩ (-9,+∞) = (-9,1)
S = S_1 U S_2 = **(-9,1)**

<u>Módulo y distancia</u>

El *modulo* o *valor absoluto* de un número real "x" es la distancia en la recta numérica del punto x al origen de coordenadas.

En símbolos: $|x|$ se lee: "modulo de x"

Ej: $|1{,}5| = |-1{,}5| = 1{,}5$

Definición: Si x є IR, su modulo o valor absoluto es: $|x| = \begin{cases} x & si \ \ x \geq 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$

Ej: $|-3| = -(-3) = 3 \ pues \ -3 < 0$

$|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2 \ pues \ \sqrt{5} - 2 \geq 0$

$|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5} \ pues \ 2 - \sqrt{5} < 0$

Distancia entre dos números reales

Se llama distancia entre dos números reales "x" e "y" cuya notacióne s d(x,y) al número real $|x - y|$

Es decir: d(x,y) = $|x - y| = |y - x|$ Caso particular: d(x,0) = $|x| = |-x|$

Propiedades del módulo

Si x e y son números reales y n entero, se verifica:

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $|x| = |-x|$

d) $|x.y| = |x|.|y|$

e) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

f) $|x| = \sqrt{x^2} \ \ ó \ \ |x|^2 = x^2$

g) $|x^n| = |x|^n$

Ecuaciones con módulo

Si k>0 entonces $|x| = k \Leftrightarrow x = k \ \ ó \ \ x = -k$

Ej: a) $|x + 2| = 4$

x+2 = 4 ó x+2 = -4

x = 2 ó x = -6

S = {2 , -6}

b) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

$(x - 1)^2 = 4$

$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{4}$

$|x - 1| = 2$ por propiedad f)

x – 1 = 2 ó x – 1 = -2

x = 3 ó x = -1

S = {3 , -1}

Inecuaciones con modulo

Si x e y son números reales y k є IR^+ entonces:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

2) $x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x| < |y|$

3) $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Rightarrow S = [-k, k]$

$|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Rightarrow S = (-k, k)$

4) $|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \ ó \ x \leq -k \Rightarrow S = (-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$

$|x| > k \Leftrightarrow x > k \text{ ó } x < -k \Rightarrow S = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Ej: a) $|x-3| < 2$ (aplicando prop.3))

$-2 < x - 3 < 2$

$-2+3 < x - 3 + 3 < 2+3$

$1 < x < 5$

S = (1,5)

b) $x^2 - 3 \geq 6$

$x^2 \geq 9$

$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$

$|x| \geq 3$ (aplicando prop.4)

$x \geq 3$ ó $x \leq -3$

S = (-∞,-3] U [3,+∞)

Unidad 1

Actividad 1:

Resuelve las siguientes ecuaciones y marca en el cuadro con una cruz a qué conjunto ó conjuntos numéricos pertenecen las soluciones.

Ecuación	IN	Z	Q	II	IR
$-3x - 6 = -12$					
$2x + 7 = -3$					
$5x + 2 = 2$					
$2x^3 - 6 = 10$					
$-x^5 - 24 = 8$					
$2x^2 - 3 = 9$					
$-3x^2 + 2 = 29$					

Actividad 2:

Ordena en forma creciente los siguientes números reales:

$$\frac{3}{2}\ ;\ -2{,}5\ ;\ 5{,}\overset{\frown}{4}\ ;\ 5{,}4\overset{\frown}{5}\ ;\ \sqrt[3]{-8}\ ;\ -2{,}3\ ;\ 1{,}415\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 1$$

Actividad 3:

Analiza cuidadosamente cada una de las siguientes afirmaciones, indica si son correctas o no y justifica:

a) $\dfrac{5+2}{3} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3}$

b) $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{64} + \sqrt{36}$

c) $\dfrac{3}{5+2} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{2}$

d) $\sqrt{9\,.\,25} = \sqrt{9}\,.\,\sqrt{25}$

e) $2 + 7 - 2 + 9 = 7 + 9$

f) $\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

g) $\dfrac{5\ .\ 2}{3\ .\ 2} = \dfrac{5}{3}$

h) $\left(3 + \dfrac{2}{5}\right)^2 = 3^2 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

i) $\dfrac{6 - 3}{5 - 3} = \dfrac{6}{5}$

j) $\left(\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 : \left(\dfrac{4}{5}\right)^3$

k) $\dfrac{6\ .\ (4 - 4)}{5\ .\ (4 - 4)} = \dfrac{6}{5}$

l) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

Actividad 4:

Calcula aplicando propiedades:

a) $(3x + z)\ .\ (3x - z) =$

b) $0{,}2^5\ .\ 0{,}2^{-4}\ .\ 0{,}2 =$

c) $(3x + z)^2 =$

d) $(3\ .\ a^5\ .\ b^2\ .\ c)^2 =$

e) $\left(\sqrt{0{,}2} - \sqrt{0{,}8}\right)\ .\ \sqrt{0{,}8} =$

f) $\sqrt[3]{0{,}050 : 2 + 0{,}08 : 0{,}8} =$

g) $\sqrt[6]{0{,}001^2} =$

h) $100^{\frac{3}{2}} =$

Actividad 5:

Completa con los números que correspondan:

20 es la cuarta parte de 80
.... es la cuarta parte de 40 — el 25 % de 40 es ....
10 es la décima parte de 100
........es la décima parte de 700 — el 10 % de 700 es ....

Actividad 6:

¿Cuáles de las siguientes expresiones u operaciones con números fraccionarios expresan:

a) el 25 % de 8 ?

i) $\dfrac{25}{100} + 8$ iv) $\dfrac{25}{100}\ .\ 8$ vii) $8 : \dfrac{25}{100}$

ii) $8\ .\ \dfrac{25}{100}$ v) $\dfrac{25}{100} : 8$ viii) $\dfrac{1}{4}\ .\ 8$

iii) $\dfrac{1}{4}$ vi) $0{,}25\ .\ 8$ ix) 2

b) el 20 % de 16 ?

i) $\frac{20}{100} + 16$ iv) $\frac{20}{100} \cdot 16$ vii) $16 : \frac{20}{100}$

ii) $16 \cdot \frac{20}{100}$ v) $\frac{20}{100} : 16$ viii) $\frac{1}{5} \cdot 16$

iii) $\frac{16}{5}$ vi) $0{,}20 \cdot 16$

Actividad 7:

a) ¿Qué número debe ser *a* para que el producto $\frac{1}{a} \cdot b$ sea:

i) el 20 % de *b*? iii) el 25 % de *b*?
ii) el 10 % de *b*? iv) el 100 % de *b*?

b) Si $a \in$ IN y $a > 1$, ¿ cómo es $\frac{1}{a} \cdot b$ en comparación con *b* ? ; $b \in$ IN

c) ¿Cómo debe ser *c* respecto de a para que $\frac{c}{a} \cdot b$ represente:

i) el 10 % de *b*? ii) más del 100% de *b*?

Actividad 8:

Por la venta de un terreno se ofrece un descuento del 10% si el pago es al contado, y sobre el precio con el descuento se efectúa un recargo del 5 % en concepto de gasto de comisión. ¿ Qué porcentaje con respecto al precio original se pagó ?.

Actividad 9:

Un cierto fertilizante contiene 45% de harina de algodón, 35% de ácido fosfórico y 20% de nitrato de sodio. ¿Cuántos kilogramos de cada una de esas sustancias hay en una tonelada de fertilizante?.

Actividad 10:

En una población de 6000 habitantes, el 30 % son hombres. En otra población vecina de 7200 habitantes, el 35 % son hombres. Si ambas poblaciones se unifican en un sólo núcleo urbano, ¿qué porcentaje de hombres hay en la nueva población?.

Actividad 11:

Un empleado de una empresa es premiado con dos aumentos sucesivos, en dos meses, ambos de un mismo porcentaje. Si ganaba $1500 y actualmente su sueldo es de $1560,6 ¿Cuál fue el porcentaje de aumento ?.

Actividad 12:

Resuelve los siguientes problemas:

a) Se consumió $\frac{1}{4}$ de la cantidad (o capacidad) de un remedio y luego la mitad de lo que quedaba. Si aún quedan 15 ml. ¿Qué capacidad tenia el frasco?.

b) Un hombre repartirá su herencia entre sus cuatro hijos del siguiente modo:
A su hija mayor le dejará la mitad, al segundo la tercera parte de lo que queda, al tercero la sexta parte de lo que queda y al cuarto cien mil pesos. ¿Cuánto dejará en total?

c) Asfaltar una calle costó 33.000.000$. Los vecinos pagaron el doble de lo que aportó la Municipalidad, mientras que la Provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte municipal. ¿Cuánto dinero pusieron los vecinos?

Actividad 13:

Para el número racional $\frac{2}{3}$, escribir dos aproximaciones por defecto y dos por exceso................................

Ídem para el número irracional $\sqrt{5}$ ....

Actividad 14:

a) ¿Cuál es la aproximación mas exacta de $\frac{2}{3}$ si redondeamos a dos cifras?
....

b) ¿Y de $\sqrt{3}$?...

c) Redondea cada una de las siguientes cantidades a cuatro cifras significativas:

$\frac{15}{24}$; $1,\widehat{3}$; $4,3\widehat{5}$; $1,41\widehat{7}$; $\sqrt{13}$

Actividad 15:

Escribe el número π:

a) con error menor que un milésimo:................................
b) con error menor que 0,001: ....
c) con ε < 0,00001: ....

Actividad 16:

En el cerebro hay más de catorce mil millones de neuronas. Escribe este número en notación científica.

Actividad 17:

La unidad de distancia que se utiliza en astronomía es un año luz, que es la distancia que recorre la luz en un año. Un año luz es aproximadamente igual a
$9,46 \cdot 10^{12}$ km.
La galaxia Andrómeda, que es el objeto más distante del cosmos que puede observarse a simple vista desde la Tierra, está ubicada a unos 2 300 000 años luz de distancia.
¿ A cuántos kilómetros está, aproximadamente, esta galaxia de la Tierra?
Escribe esta distancia en notación científica.

Actividad 18:

Completa los $\square$ para que se verifiquen las siguientes igualdades y luego expresa en notación científica.

$0,35 \cdot 10^{\square} = 0,000035$ = ...

$2,9 \cdot 10^{\square} = 0,00029$ = ...

$72 \cdot 10^{\square} = 72\ 000\ 000\ 000$ = ...

Actividad 19:

Durante una lluvia de meteoros cayeron a la atmósfera terrestre $4,2 \cdot 10^{10}$ kilogramos de polvo interplanetario en un día.
¿Cuántos kg de ese polvo hubieran caído en una semana de lluvia meteórica?.

Actividad 20:

El espesor de todas las hojas de un libro de 500 páginas es de 1,788 centímetros. Expresa en notación científica el espesor aproximado de la hoja.
(Recuerda que una hoja consta de dos páginas).

Actividad 21:

Realiza los siguientes productos de números expresados en notación científica.

a) $380000000 \cdot 65210000 =$

b) $-\,0,0000000576 \cdot 35100000 =$

c) $\dfrac{2314000000 \cdot 0,000098}{40000} =$

d) $\dfrac{130000 \cdot 0,000084}{0,00007 \cdot 0,00752} =$

Actividad 22:

Ordenar de menor a mayor: $-\,4 \cdot 10^{-3}$; $-\,3,5 \cdot 10^{-4}$; $-\,8 \cdot 10^{-2}$

Actividad 23:

Completa con mayor, menor o igual (>,< ó =) según corresponda:

a) 0,023 0,0023

b) 7,453 7,0453
c) – 0,66 .... - 0,6
d) 0,04 0,040
e) $3,5 .10^{4}$ .... $3,8 .10^{2}$
f) $6,49 .10^{3}$ .... $6,70 .10^{4}$
g) $2,33 . 10^{-4}$ .... $2,36 .10^{-5}$
h) $5,8 .10^{-8}$ .... $8,5 .10^{-8}$

Actividad 24:
Calcula:

a) $5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{18} - \frac{2}{3}\sqrt{3} =$

c) $(2 + \sqrt{5}).(2 - \sqrt{5}) =$

d) $(2 + \sqrt{5})^{2} =$

e) $(3 - \sqrt{7})^{2} =$

f) $(1 + \sqrt{2})^{3} =$

g) $(-2 + \sqrt{3})^{3} =$

h) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})^{2} =$

i) $\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} =$

j) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{2} =$

Actividad 25:
Racionaliza las siguientes expresiones :

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{6}{\sqrt[5]{12}} =$

c) $\frac{-3}{\sqrt[3]{15}} =$

d) $\frac{2}{\sqrt{3} - 2} =$

e) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} =$

f) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} =$

Actividad 26:
Contesta V ó F, si tu respuesta es Falso, escribe la expresión correcta sobre la línea punteada.

a) $\frac{\sqrt{14} + 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 2 + \sqrt{2}$ ☐ ....

b) $\frac{4}{\sqrt{5} + 3} = -\sqrt{5} - 3$ ☐ ....

c) $4\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\square$ ....

d) $(2 + \sqrt{5})^3 = 8 + (\sqrt{5})^3$ $\square$ ....

Actividad 27:

Expresa como exponente fraccionario , resuelve y luego escribe el resultado en forma de radical :

a) $\sqrt[3]{3} \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt[5]{3^2} =$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} =$

Actividad 28:

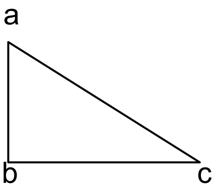
Simplifica cada expresión , considerando que cada letra es un número real y los denominadores no son nulos.

a) $x^{-1} \,.\, y^3 \,.\, (x^2 \,.\, y^{-2})^3 =$ b) $\dfrac{(x \,.\, y)^{-2} \,.\, (x^4 \,.\, z)^2}{(x \,.\, y \,.\, z)^3} =$

Actividad 29:

Calcula el valor exacto del perímetro y el área de las siguientes figuras geométricas (los datos están en cm).

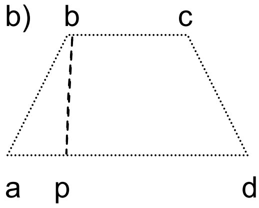
a)



abc triángulo rectángulo en $\hat{b}$

$\overline{ac} = \sqrt{45}$ $\overline{ab} = \sqrt{5}$

b)



abcd trapecio isósceles

$\overline{ad} = \sqrt{48}$

$\overline{bc} = \sqrt{12}$

$\overline{bp} = \sqrt{24}$

Actividad 30:

Resuelve y clasifica las siguientes ecuaciones.

a) $200 - [8(4x - 2) - 2(5x - 1)] = 148$

b) $\frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2} - 1$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x+1}{4}$

d) $3(x+2) - x - 8 = 2(5-2x) + 6x$

e) $\frac{x(x-1)}{6} = \frac{2x+x^2}{6} - \frac{1}{2}x$

Actividad 31:

Escribe en forma de intervalo y representa en la recta numérica :

a) $-4 < x < 5$

b) $-5x + 2 > 12$

c) $3 < x + 1 \leq 7$

d) $-6 \leq x - 3 \leq 3$

e) $\frac{2}{3} \leq x + 1 < \frac{7}{3}$

f) $-1 < 2x + 3 < 9$

g) $-5 \leq -3x - 2 < 7$

h) $\frac{1}{2} < -2x + 4 \leq \frac{5}{2}$

Actividad 32:

Encuentra, si es que existen, los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones :

a) $|x| = 5$

b) $|x| + 2|-x| = 0$

c) $x^2 = |-36|$

d) $|x| - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

e) $|x + 6| = 0$

f) $|x - 2| + |2x - 4| = 2$

g) $|5 - x| = |5 - 6|$

h) $|-2x + 1| = 7$

i) $\left|x - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$

j) $-|x| = |-3| - |7|$

k) $2|x| = |x| + |-4|$

l) $5x^2 = 3x^2 + 18$

Actividad 33:

Resuelve las siguientes inecuaciones, expresa la solución mediante intervalos y grafícalos :

a) $|x| \leq 2$

b) $|x + 3| < 0$

c) $|x| - \frac{2}{3} > \frac{7}{3}$

d) $\left|x - \frac{5}{4}\right| \geq \frac{1}{4}$

e) $|-5x + 1| < 6$

f) $4|x + 2| + |3x + 6| \geq 14$

g) $(x-3).(x+\frac{1}{2})<0$ h) $\frac{x+3}{x-1}+4\geq 4$ i) $x^2-3\leq 22$

Actividad 34:

Marca con una cruz la respuesta correcta :

a) El conjunto de los $x \varepsilon$ IR que verifican : $\frac{x}{x+1}>0$ es igual a :

1) $(0\ ;+\infty)$ 2) $(-1\ ;+\infty)$ 3) $(-\infty\ ;-1)\cup(0\ ;+\infty)$ 4) $(-\infty\ ;\ 0)\cup(0\ ;+\infty)$

b) El conjunto $A=\{x\ \varepsilon\ IR\ /\ -5x+10>17\}$ contiene al intervalo :

1) $(-1\ ;\ 1)$ 2) $(-1\ ;\ 0)$ 3) $(-2\ ;\ -1)$ 4) $(-6\ ;\ -5)$

c) El conjunto de los $x \varepsilon$ IR que verifican : $3+\frac{1}{x}<4$ es igual a :

1) $(-\infty\ ;\ -1)\cup(1\ ;+\infty)$ 2) $\varnothing$ 3) $(0\ ;\ 1)$ 4) $(-\infty\ ;\ 0)\cup(1\ ;+\infty)$

Actividad 35:

Contesta V ó F, si tu respuesta es Falso, escribe la expresión correcta sobre la línea punteada.

a) El conjunto solución de $(x+2).(x-1)>0$ es $(-\infty\ ;\ -2)\cup(1\ ;+\infty)$ ☐ ....

b) El conjunto solución de $-2x^2+3\geq -15$ es $[3\ ;+\infty)$ ☐ ....

c) El conjunto solución de $|-3x-2|\geq 7$ es $\left[-3\ ;\ \frac{5}{3}\right]$ ☐ ....

Claves de corrección

Unidad 1

Actividad 1:

Ecuación	IN	Z	Q	II	IR
$-3x - 6 = -12$	×	×	×		×
$2x + 7 = -3$		×	×		×
$5x + 2 = 2$		×	×		×
$2x^3 - 6 = 10$	×	×	×		×
$-x^5 - 24 = 8$		×	×		×
$2x^2 - 3 = 9$				×	×
$-3x^2 + 2 = 29$					

Actividad 2: $-2,5$; $-2,3$; $\sqrt[3]{-8}$; 1 ; $\sqrt{2}$; $1,415$; $\frac{3}{2}$; $5,\overset{\frown}{4}$; $5,4\overset{\frown}{5}$

Actividad 3: a) C b) I c) I d) C e) C f) C
g) C h) I i) I j) C k) I l) I

Actividad 4: a) $9x^2 - z^2$ b) $0,04$ c) $9x^2 + 6xz + z^2$
d) $9a^{10}b^4c^2$ e) $-0,4$ f) $0,5$ g) $0,1$ h) 1000

Actividad 5: 10, 70

Actividad 6: a) ii) iv) vi) viii) ix)
b) ii) iii) iv) vi) viii)

Actividad 7: a) i) $a = 5$ ii) $a = 10$ iii) $a = 4$ iv) $a = 1$

b) $\frac{1}{a} . b < b$

c) i) $c = \frac{a}{10}$ ii) $c > a$

Actividad 8: 94,5 %

Actividad 9: 450 Kg ; 350 Kg ; 200 Kg

Actividad 10: 32,7272...%

Actividad 11: 2 %

Actividad 12: a) Tenía una capacidad de 40 ml.

b) Dejará en total $ 360.000.

d) Los vecinos pusieron $ 18.000.000.

Actividad 13: 0,66 ; 0,666 y 0,67 ; 0,6667

2,236 ; 2,237 y 2,24 ; 2,2361

Actividad 14: a) 0,67 b) 1,73

c) 0,6250 ; 1,3333 ; 4,3556 ; 1,4178 ; 3,6056

Actividad 15: a) 3,141 b) 3,141 c) 3,14159

Actividad 16: $1,4 \ . \ 10^{10}$

Actividad 17: $2,1758 \ . \ 10^{19}$ km

Actividad 18: $\boxed{-4}$ $3,5 \ . \ 10^{-5}$

$\boxed{-4}$ $2{,}9 \;.\; 10^{-4}$

$\boxed{9}$ $7{,}2 \;.\; 10^{10}$

Actividad 19: $2{,}94 \;.\; 10^{11}$ kg

Actividad 20: $7{,}152 \;.\; 10^{-3}$ cm

Actividad 21: a) $2{,}47798 \;.\; 10^{16}$ b) $-2{,}02176$

c) $5{,}6693$ d) $2{,}074468085 \;.\; 10^{7}$

Actividad 22: $-8 \;.\; 10^{-2}$; $-4 \;.\; 10^{-3}$; $-3{,}5 \;.\; 10^{-4}$

Actividad 23: > ; > ; < ; = ; > ; < ; > ; <

Actividad 24: a) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{23}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ c) -1 d) $9 + 4\sqrt{5}$

e) $16 - 6\sqrt{7}$ f) $7 + 5\sqrt{2}$ g) $-26 + 15\sqrt{3}$ h) 27

i) $\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ j) $7 + 2\sqrt{10}$

Actividad 25: a) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ b) $\sqrt[5]{2^3 \,.\, 3^4}$ c) $-\frac{\left(\sqrt[3]{15}\right)^2}{5}$

d) $-2\,.\left(\sqrt{3} + 2\right)$ e) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3} + \sqrt{10}$

Actividad 26: $\boxed{\text{v}}$

$\boxed{\text{F}}$ $-\sqrt{5} + 3$

$\boxed{\text{V}}$

$\boxed{\text{F}}$ $38 + 17\sqrt{5}$

Actividad 27: a) $3\sqrt[30]{3^7}$ b) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

Actividad 28: a) $x^5\ y^{-3}$ b) $x^3\ y^{-5}\ z^{-1}$

Actividad 29: a) Perímetro: $(2\sqrt{10}+4\sqrt{5})cm$ Área: $5\sqrt{2}\,cm^2$
b) Perímetro: $12\sqrt{3}\,cm$ Área: $18\sqrt{2}\,cm^2$

Actividad 30: a) $x = 3$ b) $x = 7$ c) $x = \frac{1}{3}$
d) incompatible e) Compatible indeterminada

Actividad 31: a) $(-4, 5)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $(2, 6]$ d) $[-3, 6]$
e) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ f) $(-2, 3)$ g) $(-3, 1]$ h) $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$

Actividad 32: a) $x = 5$ ó $x = -5$ b) $x = 0$ c) $x = 6$ ó $x = -6$
d) $x = 2$ ó $x = -2$ e) $x = -6$ f) $x = \frac{8}{3}$ ó $x = \frac{4}{3}$
g) $x = 4$ ó $x = 6$ h) $x = 4$ ó $x = -3$ i) $x = 1$ ó $x = -\frac{1}{2}$
j) $x = 4$ ó $x = -4$ k) $x = 4$ ó $x = -4$ l) $x = 3$ ó $x = -3$

Actividad 33: a) $[-2, 2]$ b) $\varnothing$ c) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
d) $(-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ e) $\left(-1, \frac{7}{5}\right)$ f) $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$
g) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ h) $(-\infty, -3] \cup (1, +\infty)$ i) $[-5, 5]$

Actividad 34: a) 3) b) 4) c) 4)

Actividad 35: a) $\boxed{\text{V}}$

b) $\boxed{\text{F}}$ $[-3, 3]$

c) $\boxed{\text{F}}$ $(-\infty, -3] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

UNIDAD N°2: Función. Función lineal

Una función f queda determinada por:

- Un conjunto A denominado *dominio* (Dom f = A).
- Un conjunto B denominado *codominio* (Codom f = B).
- Una ley que asocia a cada elemento del conjunto A *un único* elemento del conjunto B

En símbolos: f : A → B / y = f(x)

Definición de dominio: el dominio de una función f es el conjunto de valores que toma la "x" (variable independiente).

Definición de imagen: la imagen de f es el subconjunto del codominio formado por todos los valores que toma la "y" (variable dependiente).

El **dominio de una función** puede describirse explícitamente junto con la expresión funcional como en el siguiente ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-16} \quad con\ -1\leq x\leq 3$$

o estar implícito en la ecuación que define la función, como puede verse en este caso:

$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (analizamos que el denominador debe ser distinto de 0, entonces el dominio será el conjunto de los x∈ IR - {-1;1}).

Función inyectiva, suryectiva y/o biyectiva:

- Si a todo par de elementos distintos del dominio A le corresponden distintos elementos en el codominio B, entonces f es **inyectiva.**
- Si el conjunto imagen de f coincide con el codominio B, entonces f es **suryectiva.**
- Si f es simultáneamente inyectiva y suryectiva, entonces f es **biyectiva.**

Ej: la función f: IR → IR / f(x) = 2 – 5 x^2

No es inyectiva porque existen elementos distintos del dominio (por ejemplo 1 y -1) que se relacionan con el mismo elemento de codominio, ya que f(-1) = f(1) = -3.

No es suryectiva porque Im f = (-∞;2] y Codom f = IR, es decir, Im f ≠ Codom f.

f(x) no es biyectiva por no ser inyectiva ni suryectiva.

Función inversa

Si f: A → B es una función biyectiva, se denomina *función inversa* de f a la función f^{-1} : B → A

definida por: f^{-1} (y) = x ⇔ f(x) = y

- Las gráficas de una función y su inversa resultan simétricas respecto de la recta y = x

- Si una función no es biyectiva, se le puede encontrar la inversa, pero no será función. O también se puede restringir el dominio y/o el codominio para que sea biyectiva y de esa forma, la inversa sí será función.
  Ej: Si se considera la función anterior f(x) = 2 – 5 x^2 como f: IR → (-∞;2], resulta suryectiva porque Im f = Codom f
  Si se desea además que sea inyectiva, debe restringirse el dominio, por ejemplo, puede tomarse dom f = [0;+∞) (con este dominio, no hay valores de x distintos con igual imagen)
  Si se considera f: [0;+∞) → (-∞;2], la función es biyectiva.

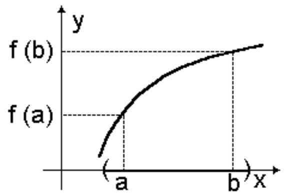
- ¿Cómo se halla la expresión analítica de la inversa de una función ?

Ej: f :IR → IR / y = 4x – 3 (función biyectiva)
Primero se intercambian las variables independiente y dependiente: x = 4y – 3

Luego se despeja la variable dependiente: x + 3 = 4y $\Rightarrow$ $\dfrac{x+3}{4} = y$ entonces la inversa es: f: IR → IR / $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x+3}{4}$

Función creciente y decreciente

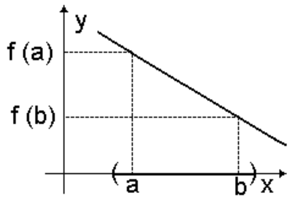
f(a)<f(b)



Una f: A → B es **creciente** en un intervalo de su dominio, si se cumple que para todo par de números a y b del mismo:

a **< b ⇒ f (a) < f (b)**

f(a)>f(b)



Una f: A → B es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si se cumple que para todo par de números a y b del mismo:

a < b ⇒ f (a) > f (b)

Extremos de una función

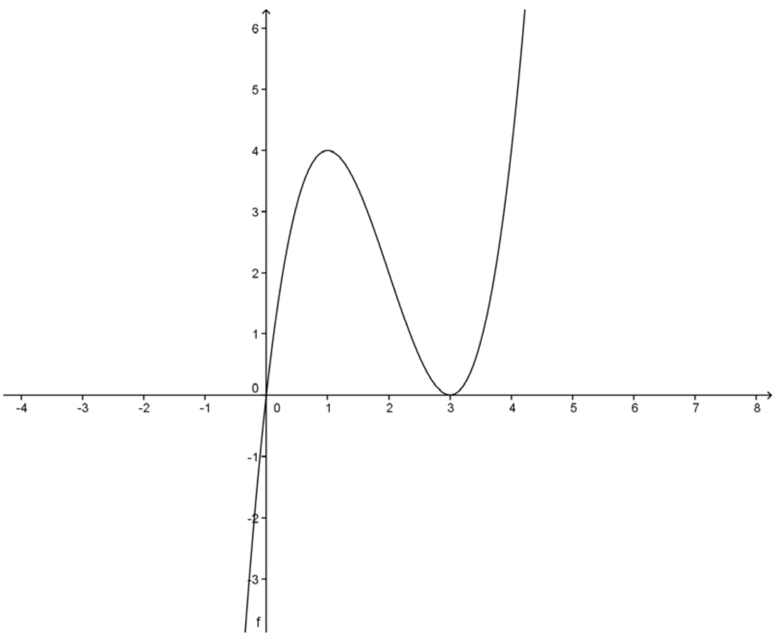
Se llama así a los máximos y mínimos relativos o absolutos de una función, los cuales se definen a continuación:

- **Máximos y mínimos relativos (o locales)**

La función alcanza un **máximo relativo** en x = x_0 si f (x_0) es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos próximos al valor x_0.

La función alcanza un **mínimo relativo** en x = x_0 si f (x_0) es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos próximos al valor x_0.

Ej: el siguiente gráfico corresponde a la función f: IR → IR / f(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x$



x = 1 es la abscisa de un punto máximo relativo de f (o hay máximo relativo en el punto de coordenadas (1,4)).
x = 3 es la abscisa de un punto mínimo relativo de f (o hay mínimo relativo en el punto de coordenadas (3,0)).

- **Máximos y mínimos absolutos**

f alcanza un máximo absoluto en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es mayor o igual que f(x) para todo x perteneciente al dominio de f.

f alcanza un mínimo absoluto en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es menor o igual que f(x) para todo x perteneciente al dominio de f.

Ej:
Si se considera la función f: IR → IR / $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ya graficada, no tiene ni máximos ni mínimos absolutos.
Pero si se cambia el dominio IR por el conjunto Dom f = [0,5; 5] la función sigue teniendo los mismos extremos relativos y además:
x = 3 es un mínimo absoluto
x = 5 es un máximo absoluto

Conjunto de ceros o raíces de una función

El conjunto de ceros de una función, que se escribirá C_0, es el conjunto de puntos para el que la función vale cero, es decir, "x" es cero o raíz de una función si f(x) = 0

$$C_0 = \{x \in \text{Dom } f \;/\; f(x) = 0\}$$

Los ceros de una función pueden determinarse gráfica y/o analíticamente:

Gráficamente: basta ver la intersección de la curva con el eje x.

Analíticamente: se obtienen a través del planteo de una ecuación. Por ejemplo, si se desea determinar cuál/les son los ceros de la función $g(x) = x^2 - 4$ planteamos la ecuación g(x) = 0 y resolvemos:

$$g(x) = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = \sqrt{4} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -2 \Rightarrow$$
$$C_0 = \{-2 ; 2\}$$

Conjuntos de positividad y de negatividad de una función

Las intersecciones de la gráfica de una función con el eje de abscisas, facilitan la determinación del intervalo (o *unión* de intervalos) en los cuales la función es **positiva** y los intervalos (o unión de intervalos) en los cuales es **negativa**.

- El **conjunto de positividad** (C_+) de una función f(x) es el subconjunto del dominio formado por **los x** para los cuales **las imágenes son números positivos.**

$$C_+ = \{x \in \text{Dom } f \;/\; f(x) > 0\}$$

- El **conjunto de negatividad** (C_-) de una función f(x) es el subconjunto del dominio formado por **los x** para los cuales **las imágenes son números negativos.**

$$C_- = \{x \in \text{Dom } f \;/\; f(x) < 0\}$$

Para hallar C_+ y C_- en forma <u>analítica</u>, se deben resolver las siguientes inecuaciones: **f (x) > 0 y f(x) < 0.**

Ej: para determinar los conjuntos de positividad y de negatividad de: **f(x) = 4x + 8**

Planteamos las inecuaciones y resolvemos:

C_+: $f(x) > 0 \Rightarrow 4x + 8 > 0 \Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$

C_- = $f(x) < 0 \Rightarrow 4x + 8 < 0 \Rightarrow 4x < -8 \Rightarrow x < -2$

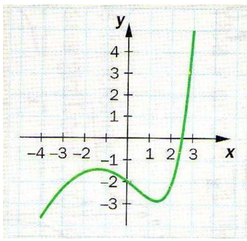
Solución: $C_+ = (-2; +\infty)$ $C_- = (-\infty; -2)$

<u>Continuidad</u> (idea intuitiva)

Una función es continua cuando puede trazarse su gráfica "sin levantar el lápiz".

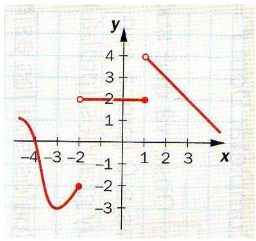
Ej:

a)



Continua para todo x є IR

b)



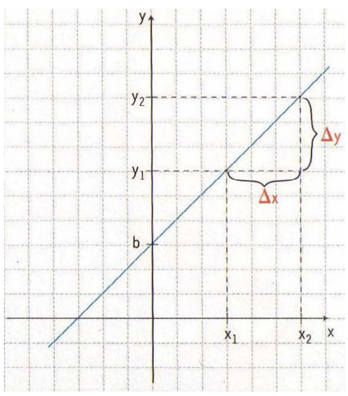
Discontinua en x = -2 y x = 1

<u>Función lineal</u>

Si una función es de la forma f: IR→IR / f(x) = mx+b, m, b є IR, su gráfico es una recta y se llama función lineal.

- El número "m" se llama *pendiente* e informa sobre la inclinación de la recta.

Se define como el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx), de cualquier par de puntos pertenecientes a la recta. Si esos puntos son $p(x_1,y_1)$ y $q(x_2,y_2)$, entonces: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, si $x_1 \neq x_2$ (si $x_1 = x_2$, no existe m y la recta es vertical)



- El número "b" se llama *ordenada al origen* y es el valor que toma la función para x = 0. El punto **(0; *b*)** es el punto de intersección entre la recta y el eje de ordenadas.

- Si m = 0 $\Rightarrow$ **y = b** es la ecuación de una *recta horizontal.*

- Si b = 0 $\Rightarrow$ **y = mx** es la ecuación de una recta que pasa por (0,0).

- Las *rectas verticales* **no corresponden a funciones** y su ecuación es de la forma **x = k**; k є IR.

- Diferentes formas de representación de la recta:

Ecuación explícita	**Ecuación implícita**	**Ecuación segmentaria**
y = mx+b	cx+dy+e = 0	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ a: abscisa al origen b: ordenada al origen

- Ecuación de la recta dada la pendiente "m" y el punto $p(x_0,y_0)$ perteneciente a la misma: $y - y_0 = m\ (x - x_0)$

- Ecuación de la recta que pasa por los puntos $p(x_1,y_1)$ y $q(x_2,y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

<u>Posición de dos rectas en el plano</u>

Dadas las rectas R_1: $y = m_1x+b_1$ y R_2: $y = m_2x+b_2$

- Si $m_1 = m_2$ $\Rightarrow$ $R_1 // R_2$ (R_1 y R_2 son *paralelas*)

Caso particular: si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$, las rectas R_1 y R_2 son *paralelas coincidentes*

- Si $m_1 . m_2 = -1$ $\Rightarrow$ $R_1 \perp R_2$ (R_1 y R_2 son *perpendiculares*)
-
- Si $m_1 \neq m_2$ pero $m_1 . m_2 \neq -1$ $\Rightarrow$ $R_1 \angle R_2$ (R_1 y R_2 son *oblicuas*)

<u>Ceros de una función lineal</u>

Cuando se buscan los ceros o raíces de una función lineal y = mx+b, se resuelve la ecuación mx+b = 0 llamada *ecuación de primer grado.*

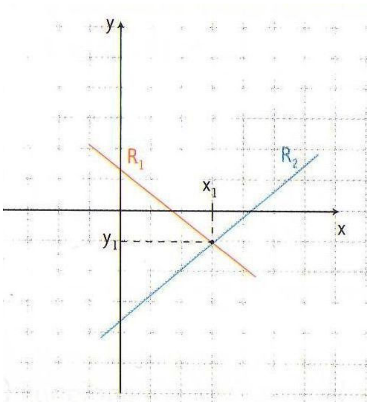
<u>**Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**</u>

Dadas las rectas R_1: $y = m_1x+b_1$ y R_2: $y = m_2x+b_2$ forman el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$$

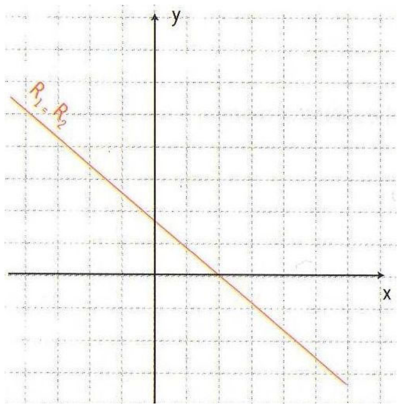
Resolver el sistema significa encontrar los puntos del plano (x,y) que tienen en común R_1 y R_2.

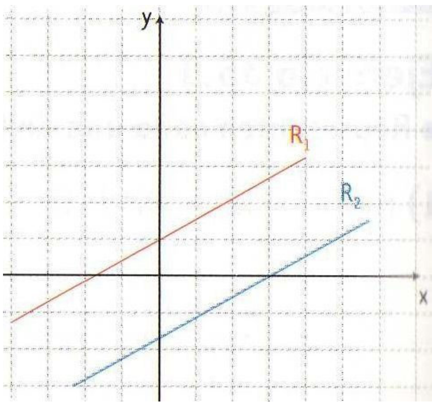
Interpretación gráfica de los casos posibles



$R_1 \cap R_2 = (x,y)$
Las rectas son incidentes
La solución es única
El sistema es *compatible determinado*

$R_1 = R_2$
Las rectas son coincidentes
Hay infinitas soluciones
Sistema *compatible indeterminado*





$R_1 \cap R_2 = \{\ \}$
Las rectas son paralelas no coincidentes
No existe ninguna solución
El sistema es *incompatible*

Método gráfico de resolución

Se grafican ambas rectas en el mismo sistema de coordenadas y se busca el punto de intersección, si existe.

Métodos analíticos de resolución

- Método de igualación

1°) Se despeja *la misma* incógnita en ambas ecuaciones
2°) Se igualan las expresiones obtenidas
3°) Se resuelve la ecuación de primer grado que resulta
4°) Se averigua la incógnita que falta sustituyendo el valor hallado en el paso 3°) en cualquiera de las ecuaciones del paso 1°)

- Método de sustitución

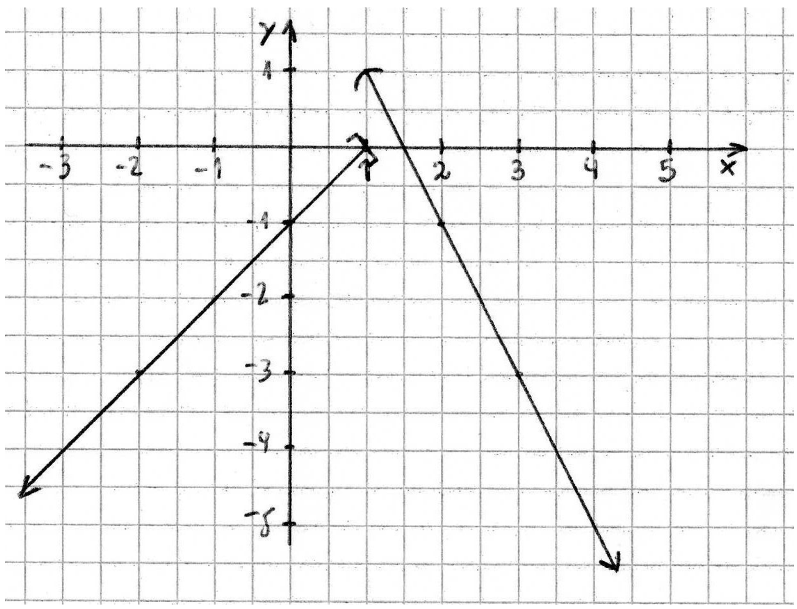
1°) Se despeja *una* incógnita en *una* de las ecuaciones
2°) Se sustituye la expresión obtenida en el paso 1°) en la ecuación aún no utilizada
3°) Se resuelve la ecuación de primer grado resultante
4°) Se averigua la incógnita que falta sustituyendo el valor hallado en el paso 3°) en la ecuación del paso 1°)

Función por tramos

Es una función que utiliza varias expresiones para su definición, utilizando cada una de ellas en un determinado tramo del dominio de definición de la función principal.

Ej: $f : IR \to IR \,/\, f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x \leq 1 \\ 3-2x & si\ x > 1 \end{cases}$

Es una función por tramos, ya que para un intervalo del dominio (-∞,1] la imagen se define de una manera (f(x) = x – 1) y para otro intervalo (1,+∞) se define de otra forma (f(x) = 3 – 2x)
El gráfico es el siguiente:



Unidad 2

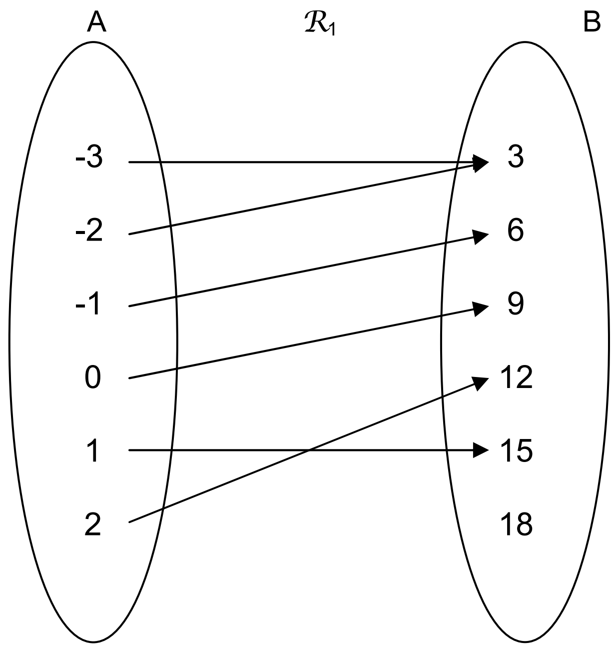
Actividad 1:

Dados:

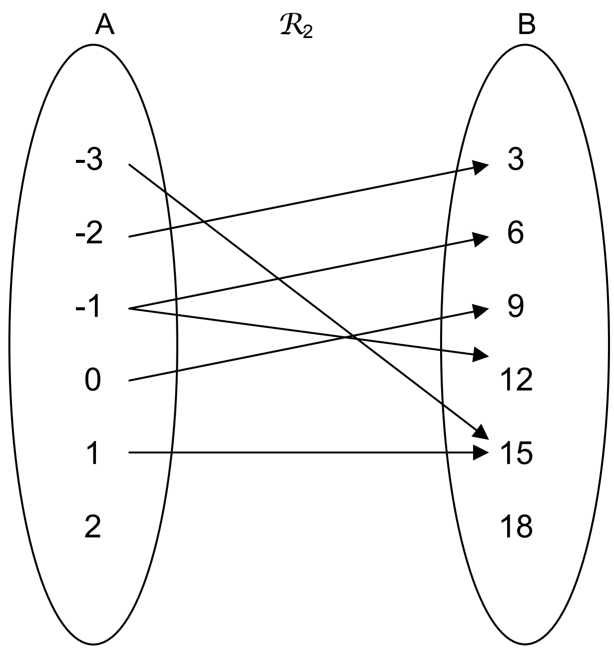
$A = \{ x \, \varepsilon \, Z \, / \, -3 \leq x \leq 2 \}$ $B = \{ x \, \varepsilon \, IN \, / \, x \text{ es múltiplo de } 3 \;\wedge\; 3 \leq x < 20 \}$.

i) Determina cuáles de las relaciones definidas de A en B son funciones de A en B. Justifica las respuestas.

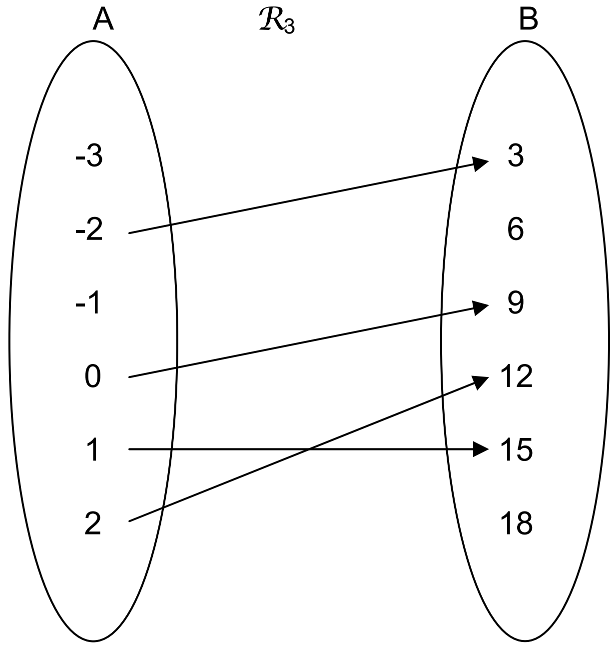
a)



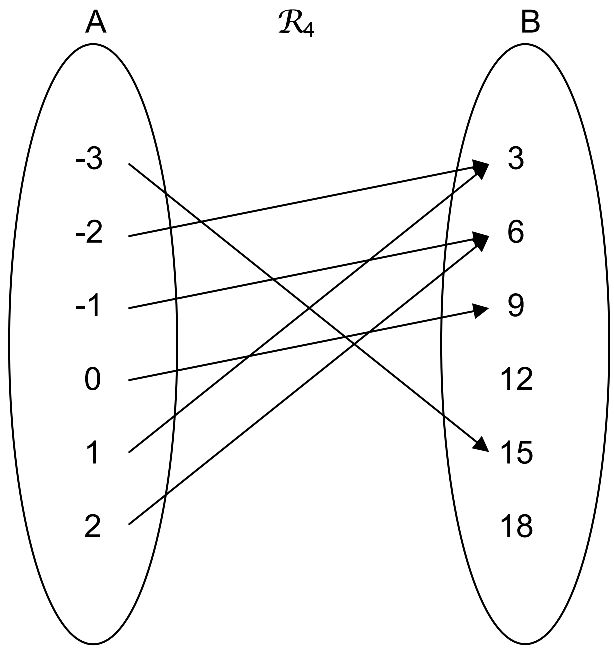
b)



c)



d)



ii) ¿Cuál es el dominio y el codominio de cada una de las funciones anteriores?
iii) En aquellas que son funciones, determina la imagen.
iv) ¿Alguna de las funciones del ejercicio es biyectiva?. En caso afirmativo, ¿cuáles?

Actividad 2:

Sean $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 8, 10, 12\}$ y $f : A \to B$ la función definida por la fórmula $f(x) = 2x$.

a) Realiza un diagrama de Venn para la función f.
b) ¿ Es f biyectiva ?.

c) Realiza un diagrama de Venn para f^{-1}.
d) Escribe la fórmula, el dominio y el codominio de f^{-1} .

Actividad 3:

Dada $f : Z \rightarrow Z$ la función definida por la fórmula $f(x) = x + 2$,

a) Calcula : f (- 1) = ... , f (0) = ... , f (-12) = ... , f (- 4) = ...
b) Encuentra, si es posible, $x \in Z$ que verifique :

f (x) = - 1 x = ...
f (x) = 2 x = ...
f (x) = 0 x = ...

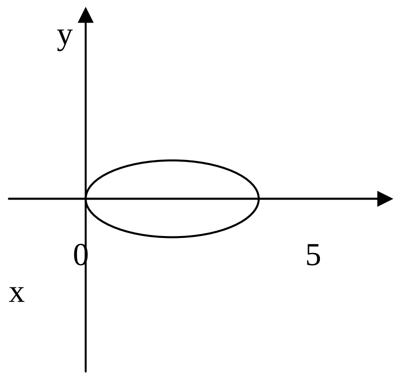
c) ¿ Es f biyectiva ?.

d) Escribe la fórmula de f^{-1} .

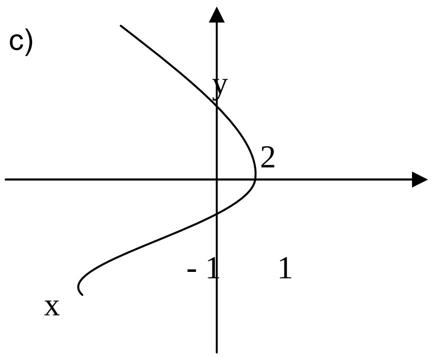
Actividad 4 :

i) Observa los siguientes gráficos e indica si corresponden a funciones de IR en IR.
ii) Indica dominio e imagen de las funciones correspondientes al inciso i).
iii) Indica las raíces ó ceros de cada una de las funciones, los intervalos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y los mínimos relativos.

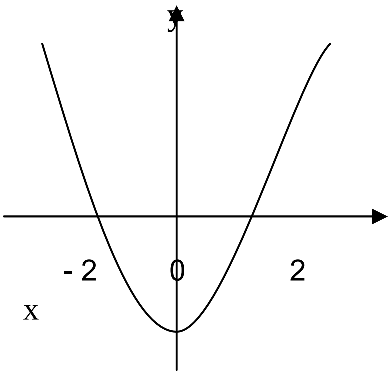
a)



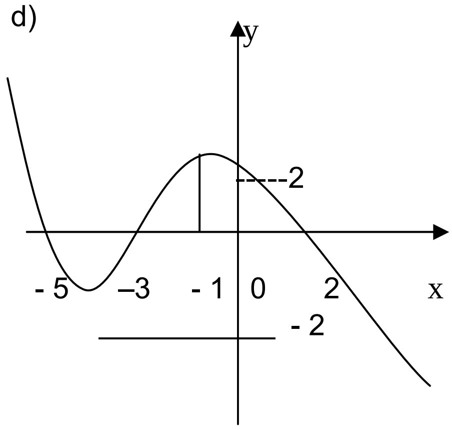
c)



b)



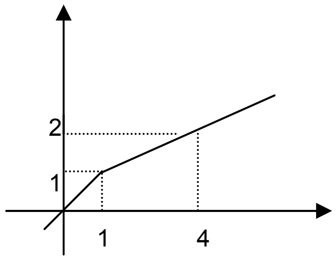
d)



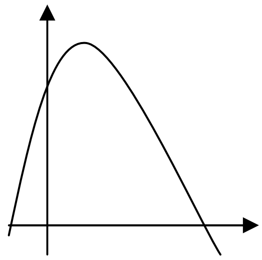
Actividad 5:

i) Clasifica en inyectivas, suryectivas y/o biyectivas las siguientes funciones f: IR $\rightarrow$ IR a partir de su gráfico.

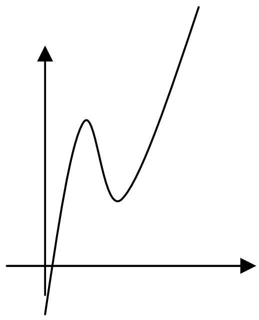
a)



b)



c)



ii) Si alguna de las funciones anteriores es biyectiva, grafica su función inversa.

Actividad 6:

En cada una de las siguientes funciones lineales, ¿cuál es la pendiente? ¿Cuál es la ordenada al origen?. Represéntalas.

a) $y = -3x + 1$
b) $y = -4 + 2x$
c) $y = 2x$
d) $y = -\frac{1}{2}x + 1$
e) $y = 2$
f) $-4y - 2 = 8x + 10$

Actividad 7:

a) Escribe la ecuación y dibuja la gráfica de la recta que tiene pendiente -3 y que pasa por el punto (0 , 2).
b) Escribe la ecuación y dibuja la gráfica de la recta que tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto (- 3 , 1).

Actividad 8:

Escribe la ecuación y dibuja la gráfica de la recta que tiene pendiente igual a $\frac{1}{2}$ y que pasa por el punto (3 , 2).

Actividad 9:

Dadas las siguientes funciones polinómicas lineales:

$f(x) = 3x + 1$ $f(x) = -3x$ $f(x) = x + 1$

a) Grafica dichas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Determina los valores del dominio de cada función donde el gráfico interseca al eje de las abscisas (raíces).
c) Determina para cada una de ellas- $f^{-1}(x)$.

Actividad 10:

Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas :

a) De igual ordenada al origen que $y = 3x + 1$ y pendiente -4.
b) De pendiente -5 y que pase por el origen de coordenadas.
c) Paralela a $y = -\frac{1}{2}x + 1$ y ordenada al origen $\frac{3}{2}$.
d) Perpendicular a $y = -4 + 2x$ y que pase por el punto $(0, 3)$.

Actividad 11:

Determina la ecuación de las rectas que pasan por los puntos :

a) $(2, 3)$ y $(4, 8)$.
b) $(-2, 8)$ y $(6, -2)$.
c) $(1, 3)$ y $(1, 1)$.
d) $(2, 3)$ y $(4, 3)$.

Actividad 12:

a) ¿ Cuál es la ecuación de la recta paralela a $-4y - 2 = 8x + 10$ que pasa por el punto
$(-1, 3)$.

b) ¿ Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a $-4y - 2 = 8x + 10$ que pasa por el punto
$(-2, 1)$.

Actividad 13:

¿ Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de las rectas $y = 3x + 2$ e $y - 2x = 2$ y que pasa por el punto $(0, -8)$.

Actividad 14:

Marca con una cruz la respuesta correcta :

a) Sea f la función lineal que verifica que $f(-1) = 4$ y $f(2) = -5$, entonces contiene al punto :

1) $(-2, -7)$ 2) $(1, -4)$ 3) $(-3, 10)$ 4) $(4, -13)$ 5) ninguno de los anteriores

b) Si la recta R pasa por $(2, -5)$ y por $(3, -1)$, su pendiente mide :

1) 6 2) - 6 3) 4 4) -4 5) ninguno de los anteriores

c) La recta que pasa por (27 , 1) y por (21 , 5), tiene ecuación :

1) $y = \frac{2}{3}x - 9$ 2) $y = \frac{4}{9}x - 2$ 3) $y = \frac{5}{21}x$ 4) $y = -\frac{2}{3}x + 19$ 5) ninguno de los anteriores

Actividad 15:

Resuelve analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ \frac{1}{3}y = x - 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 4x - 1 = -6y \end{cases}$

Actividad 16:

Resuelve analíticamente los siguientes sistemas por el método que crea conveniente:

a) $\begin{cases} 3x - 16 = 2y \\ -2y - 8x = -28 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = \frac{1}{2} \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y - \frac{7}{2} = -6x \\ 5x - 2y = \frac{2}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 4 + 3y = 0 \\ x = \frac{3 - y}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 14 \\ 1 - \frac{y}{4} + \frac{x}{3} = 0 \end{cases}$

Actividad 17:

¿Cuánto tiene que valer “a” y “b” para que el siguiente sistema tenga por solución al par (-1,1)?

$$\begin{cases} ax + 2y = b \\ -4x + by = 3 \end{cases}$$

Actividad 18:

Resuelve los siguientes problemas:

a) Un estudiante reunió en una caja arañas y escarabajos. En total 8. Si se cuentan todas las patas de los bichos que hay en la caja resultan 54. ¿Cuántas arañas y escarabajos hay?.

b) ¿Cuál es la fracción tal que si se le suma 1 a cada uno de sus dos términos se hace igual a $\frac{1}{2}$ y si se le resta dos a cada uno resulta $\frac{1}{5}$?.

c) Halla cuál es el número de dos cifras tal que si sabemos que la suma de sus dos cifras es 10 y que si se invierte el orden de sus cifras resulta otro número que es igual a 26 más dos veces el primero.

d) La edad de María es el doble de la edad de Julia. Hace 10 años la suma de las edades de las dos era igual a la edad actual de María. ¿Cuál es la edad de María? ¿Y la de Julia?

e) La recaudación de un partido de fútbol fue de 189.562 pesos. Las entradas a tribuna costaban $ 5 cada una y las entradas a platea $ 12 . ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron, si ingresaron en el estadio 22.000 personas?

f) En un triángulo rectángulo la diferencia entre las medidas de sus ángulos agudos es 21^{o}. Encuentra dichos ángulos.

g) Por dos kilos de azúcar y cinco de yerba se pagó $ 17. Si el precio del azúcar aumenta
un 20% y el de la yerba disminuye en un 10%, por la misma compra se pagaría $15,9.
Halla el precio del kilo de cada artículo.

h) La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

i) Hace 2 años la edad del padre era 4 veces la edad del hijo. Dentro de 2 años, la edad del hijo será la tercera parte de la edad del padre. Halla las edades actuales de ambos.

j) Un comerciante compra una licuadora y una videograbadora a $440. Al venderlos pierde un 10 % con la licuadora y gana un 25 % con la videograbadora. Si por los dos cobró $536.¿Cuánto pagó por cada uno?.

k) La suma de dos resistencias es de 60 ohmios, pero se sabe que sus valores están entre sí en la relación de 1 a 5. ¿Cuál es el valor de cada una de las resistencias?

Actividad 19:

Plantea y resuelve analíticamente los siguientes problemas :

a) Al colocarse una sustancia A en agua, se puede observar que su solubilidad varía con la temperatura en forma lineal.
De acuerdo a los resultados se construyó la siguiente tabla:

T (temperatura en ª C)	20	36	52	66
S (gramos de A en 100 g de agua)	15	23	31	38

En base a ella, responde :

i) ¿ Qué ecuación matemática puede interpretar estos resultados ?. (Siendo S función de T)

ii) ¿ Cuántos gramos de A se disolverán en 100 gramos de agua a 40 ºC ?.

a) Para una obra en construcción se necesita comprar arena y se piden dos presupuestos . En la casa de materiales A , el costo de la arena (en $) está dado en función de la cantidad que se compra (en m^3) por la función y = 15 x + 5 .En la casa de materiales
B , el m^3 de arena cuesta $ 14 y su traslado $ 8 . Ambas casas venden la cantidad de
arena que desee el cliente.
i) Encuentra la función lineal que permite calcular el costo de la arena en función de la cantidad comprada en la casa de materiales para la construcción B .
ii) Encuentra analíticamente cuántos m^3 de arena se tendrían que comprar para pagar lo mismo .
iii) Contesta : ¿ En qué casa de materiales conviene comprar la arena , si se necesitan 5 m^3 ?. ¿Por qué ?.

Actividad 20:

Completa sobre la línea punteada para que las siguientes proposiciones resulten
verdaderas.

a) La ecuación de la recta que pasa por el punto (0 , -1) y es perpendicular a la recta

que pasa por los puntos (3 , 1) y (- 6 , 4) es
....

b) El valor de p para que las rectas 2 y - 5 x - 1 = 0 y 3 x - 1 + p y = 5 sean paralelas es ....

b) La recta $y = \frac{a}{4}x - 3$ es paralela a la recta 6 x - 3 y - 2 = 0 si a = ...

c) Si (-1 , 2) es solución del sistema $\begin{cases} 5x + ay = b \\ ax + 3y = 4 \end{cases}$, entonces a = ... y

b = ...

Actividad 21:

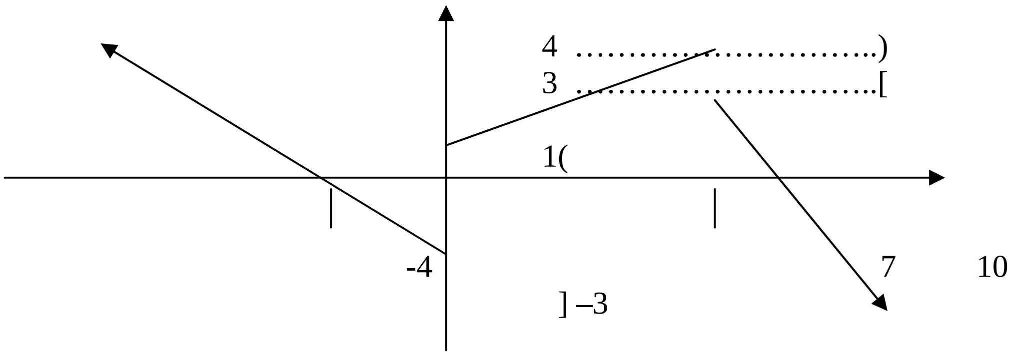
Dadas las siguientes funciones por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in (-\infty;1) \\ X - 3 & \text{si } x \in [1;+\infty) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -5 \\ -x & \text{si } -5 < x \le 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Grafica dichas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Determina el dominio y la imagen de cada una de ellas.
c) Escribe para cada una C_0, C_+, C_-, intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d) Calcula: f(-3); f(1); f(5,2); g(-5); g(1/2); g(2).
e) Analiza la biyectividad de f y g, siendo Codominio f = Codominio g = IR

Actividad 22:

Encuentra la fórmula de una función por tramos cuyo gráfico sea:



Actividad 23:

Una entidad de Correo Privado publicita el envío de encomiendas por JET-PACK con el siguiente cuadro:

Servicio	**Hasta 1 kg**	**De 1 hasta 2,5 kg**	**De 2,5 hasta 5 kg**
Clásico	$10	$15	$20
Especial	$30	$35	$40

a) Halla la fórmula que da el precio en función de los kg de la encomienda para cada servicio clásico o especial, llama a las funciones f y g.
b) Grafica ambas funciones f y g en distintos ejes, con escalas iguales, y compara ambas representaciones.
c) Escribe dominio e imagen de las funciones f(x) y g(x).
d) Indica para qué valores de la variable independiente existen puntos de discontinuidad en ambas funciones.

Claves de corrección

Unidad 2

Actividad 1: i) a) si b) no c) no d) si

ii) Dom R_1 = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; Codom R_1 = $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

Dom R_4 = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; Codom R_4 = $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

iii) Im R_1 = $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

Im R_4 = $\{3, 6, 9, 15\}$

iv) ninguna.

Actividad 2:

a) $f(1) = 2$; $f(4) = 8$; $f(5) = 10$; $f(6) = 12$
b) si
c) $f^{-1}(2) = 1$; $f^{-1}(8) = 4$; $f^{-1}(10) = 5$; $f^{-1}(12) = 6$
d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$; Dom f^{-1} = $\{2, 8, 10, 12\}$; Codom f^{-1} = $\{1, 4, 5, 6\}$

Actividad 3: a) $f(-1) = 1$ $f(0) = 2$ $f(-12) = -10$ $f(-4) = -2$
b) $x = -3$ $x = 0$ $x = -2$
c) si
d) $f^{-1}(x) = x - 2$

Actividad 4: i) a) no b) si c) no d) si

ii) b) Dom = IR Im = $[-3, +\infty)$

d) Dom = IR Im = IR

iii) b) C_0 = $\{-2, 2\}$; $C_+ = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; $C_- = (-2, 2)$

d) C_0 = $\{-5, -3, 2\}$; $C_+ = (-\infty, -5) \cup (-3, 2)$
$C_- = (-5, -3) \cup (2, +\infty)$

Actividad 5:

a) Es inyectiva, es suryectiva, es biyectiva.
b) No inyectiva, no suryectiva, no biyectiva.
c) No inyectiva, sí suryectiva, no biyectiva.

Actividad 6: Si m: pendiente y b: ordenada al prigen

a) $m = -3$ $b = 1$
b) $m = 2$ $b = -4$
c) $m = 2$ $b = 0$
d) $m = -\frac{1}{2}$ $b = 1$
e) $m = 0$ $b = 2$
f) $m = -2$ $b = -3$

Actividad 7: a) $y = -3x + 2$ b) $y = \frac{2}{3}x + 3$

Actividad 8: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Actividad 9: b) $x = -\frac{1}{3}$; $x = 0$; $x = -1$

d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$; $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$; $f^{-1}(x) = x - 1$

Actividad 10: a) $y = -4x + 1$ b) $y = -5x$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Actividad 11: a) $y = \frac{5}{2}x - 2$ b) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$

c) $x = 1$ d) $y = 3$

Actividad 12: a) $y = -2x + 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + 2$

Actividad 13: $x = 0$

Actividad 14: a) 3) b) 3) c) 4)

Actividad 15: a) $S = \{(1, 2)\}$ b) Compatible indeterminado c) Incompatible

Actividad 16: a) $S = \{ (4 , -2) \}$ b) $S = \left\{ \left(\frac{23}{26} , \frac{51}{13} \right) \right\}$

c) $S = \left\{ \left(\frac{1}{3} , \frac{1}{2} \right) \right\}$ d) $S = \{ (-1 , 2) \}$

e) $S = \left\{ \left(\frac{5}{2} , -2 \right) \right\}$ f) $S = \{ (12 , 20) \}$

Actividad 17: a = 3 ; b = - 1

Actividad 18: a) 3 arañas y 5 escarabajos.

b) La fracción es $\frac{3}{7}$

c) El número es 28.

d) La edad de María es 40 y la de Julia 20.

e) Se vendieron 10634 entradas de tribunas y 11366 entradas de plateas.

f) Los ángulos miden 55 º 30 ‘ y 34 º 30 ‘.

g) $ 1 el Kg de azúcar y $ 3 el Kg de yerba.

h) El número es 63.

i) La edad del padre es 34 años y la del hijo 10 años.

j) $ 40 la licuadora y $ 400 la videograbadora.

k) 10 y 50 ohmios.

Actividad 19: a) i) $S = \frac{1}{2} t + 5$ ii) 25 gramos

b) i) $y = 14x + 8$ ii) $3 \ m^3$ iii) en la casa B

Actividad 20: a) $y = 3x - 1$ b) $p = -\frac{6}{5}$

c) $a = 8$ d) $a = 2$ y $b = -1$

Actividad 21:

b) Dom f = IR ; Im f = $[-2 ; \infty)$

Dom g = $(-\infty ; 1] \cup (2 ; \infty)$; Im g = $[-1 ; \infty)$

c) Función f : $C_0 = \{ 3 \}$; $C_+ = (3 ; \infty)$; $C_- = (-\infty ; 3)$; Int. Crec.= $(1 ; \infty)$; Int. Decr.=$\emptyset$

Función g : $C_0 = \{ 0 \}$; $C_+ = (-\infty ; 0) \cup (2 ; \infty)$; $C_- = (0 ; 1]$; Int. Crec.= $(2 ; \infty)$;

Int. Decr.= $(-5 ; 1)$

d) f (-3) = -2 ; f (1) = -2 ; f (5,2) = 2,2
g (-5) = 2 ; g (1/2) = - 1/2 ; g (2) = ∃

e) Ninguna de las dos funciones anteriores es inyectiva, ni suryectiva, ni biyectiva.

Actividad 22:

$$f(x)=\begin{cases} -3/4x-3 & \text{si } x \leq 0 \\ 3/7x+1 & \text{si } 0 < x < 7 \\ -x+10 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Actividad 23:

a) $f(x)=\begin{cases} 10 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 15 \text{ si } 1 < x \leq 2{,}5 \\ 20 \text{ si } 2{,}5 < x \leq 5 \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} 30 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 35 \text{ si } 1 < x \leq 2{,}5 \\ 40 \text{ si } 2{,}5 < x \leq 5 \end{cases}$

c) Dom f = Dom g = (0;5]
Im f = {10; 15; 20} Im g = {30; 35, 40}
d) Discontinuas en x=1 y x=2,5

Unidad 3: Función cuadrática

A la función f: IR→IR / $f(x) = ax^2+bx+c$ siendo a, b, c números reales y a ≠ 0, se la denomina *función cuadrática.*
La representación gráfica de la función cuadrática es una *parábola.*

Elementos de la parábola

- Raíces: pueden obtenerse analíticamente mediante la *fórmula resolvente* de

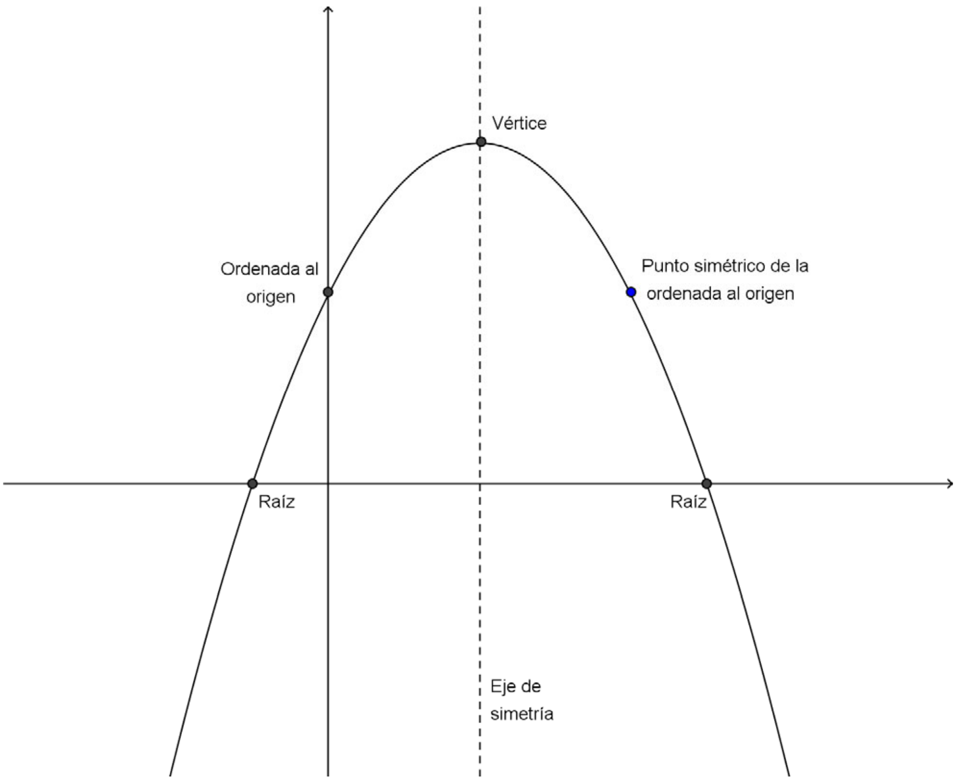
la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$ que es la siguiente: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Vértice: $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ *ó* $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ $y_v = f(x_v)$

Las coordenadas del vértice son: $v = (x_v, y_v)$

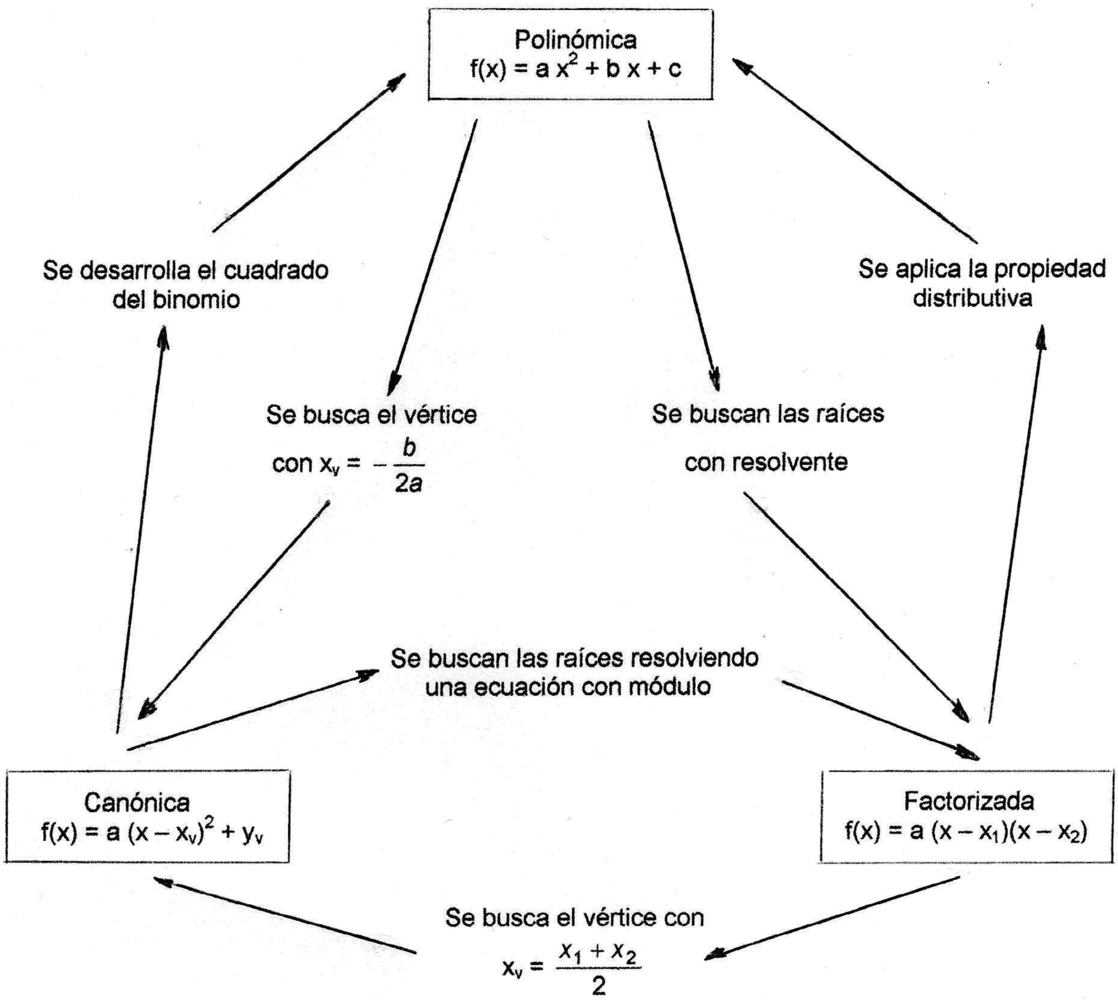
- Ordenada al origen: $f(0) = c$

Las coordenadas de la ordenada al origen son: (0,c)



Ecuaciones polinómica, canónica y factorizada

La función cuadrática puede ser expresada de distintas formas.
En el siguiente esquema se muestra como puede obtenerse una de esas formas a partir de otra:



El discriminante y las raíces

El radicando de la fórmula resolvente $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que se utiliza para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, recibe el nombre de discriminante y se denomina con Δ, o sea $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces distintas y la gráfica de la función cuadrática asociada con ella corta al eje x en 2 puntos.

- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene dos raíces iguales (raíz doble) y la función cuadrática asociada tiene un solo punto de contacto con el eje x.

- Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene raíces no reales y la función cuadrática asociada no corta al eje x.

Números complejos

Si se quiere resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, se deberían buscar valores de x que elevados al cuadrado sean iguales a -1, pero el cuadrado de todo número real es mayor o igual que cero, por lo tanto, esa ecuación no tiene solución en IR.

Observar que si se calcula el discriminante, $\Delta = 0^2 - 4.1.1 = -4$ (las raíces no son reales)

Se define un nuevo conjunto de números para que este tipo de ecuaciones tenga solución: el conjunto de los **números complejos** (**C**).

<u>Definición</u>: se llama **unidad imaginaria** y se simboliza "i", a aquel número cuyo cuadrado es igual a -1:

$$\boxed{i^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad i = \sqrt{-1}}$$

La ecuación anterior resuelta en el conjunto C, resulta así:

$$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -1 \;\Rightarrow\; |x| = \sqrt{-1} \;\Rightarrow\; |x| = i \;\Rightarrow\; x_1 = i \;\text{ ó }\; x_2 = -i$$

Otro ejemplo: $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -4 \;\Rightarrow\; x^2 = 4.(-1) \quad |x| = \sqrt{4.(-1)} \;\Rightarrow\; |x| = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i \;\Rightarrow\; x_1 = 2i \;\text{ ó }\; x_2 = -2i$$

Ahora un ejemplo de una ecuación completa:

$8x^2 + 4x + 5 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.8.5}}{2.8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{144.(-1)}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}.\sqrt{-1}}{16} = \frac{-4 \pm 12i}{16}$$

Entonces las soluciones son: $x_1 = \dfrac{-4+12i}{16} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i \quad y \quad x_2 = \dfrac{-4-12i}{16} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}i$

Todo número complejo tienen la forma **z = a + b i**, llamada **forma binómica**, donde "a" y "b" son números reales e "i" es la unidad imaginaria.

- a se llama parte real
- b se llama parte imaginaria

Ej: - El número -2 + 3 i tiene a -2 como parte real y a 3 como parte imaginaria.
- El número 2 i = 0 + 2 i tiene a 0 como parte real y a 2 como parte imaginaria.
- Cualquier número real puede considerarse como un número complejo de parte imaginaria nula: 8 = 8 + 0 i tiene a 8 como parte real y a 0 como parte imaginaria. Entonces:

El conjunto IR de los números reales está incluido en el conjunto C de los números complejos.

<u>Sistemas mixtos</u> (intersección entre parábolas, parábola y recta)

$$\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$$

- Para resolver un sistema mixto gráficamente, se buscan los puntos de intersección de ambas gráficas.

- Para resolverlo analíticamente, se aplica el método de igualación o sustitución ya mencionados.

Unidad 3

Actividad 1: Dadas las siguientes funciones cuadráticas:

$f_1\ (x) = x^2 + 2x$ $\quad f_2\ (x) = -2\ x^2 + 8$ $\quad f_3\ (x) = -x^2 - x + 6$

$f_4\ (x) = x\ (x - 3)$ $\quad f_5\ (x) = -2\ (x + 3)^2 - 2$ $\quad f_6\ (x) = -(x + 3)(x - 1{,}5)$

a) Grafica dichas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Determina gráficamente las raíces de cada función.
c) Determina analíticamente las raíces de las funciones cuadráticas.
d) Determina vértice y eje de simetría.
e) Para cada una de las funciones determina máximos y/ o mínimos.
f) Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los intervalos de positividad y los de negatividad.
g) Escribe cada una de ellas en las otras dos formas, si es posible.

Actividad 2: Halla las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 6\ x + 4 = 0$ $\quad$ b) $2x^2 + 0{,}5\ x = 0$

c) $x^2 + 4x + 9 = 0$ $\quad$ d) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{9} = 0$

e) $x^2 - a\,x - a^2 = 0$ $\quad$ f) $4x^2 - 4a\,x + a^2 = 0$

Actividad 3: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x\ (x - 1) = 2\ (x + 1)$

b) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x^2 = x$

c) $(x - 1)\ (x + 2) = 2x^2 - 1$

d) $\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

e) $(2x - 1)^2 - (x + 1) = 0$

Actividad 4: Halla el valor de "k" tal que $3\ x^2 + 15\,k\,x + 6 = 0$ tenga una raíz doble.

Actividad 5: Encuentra el ó los valores de "t" para que cada una de las siguientes ecuaciones tenga :

i) una raíz doble.
ii) dos raíces reales distintas
iii) dos raíces complejas conjugadas.

a) $2\ x^2 - 12\ x + 2\ t = 0$ $\quad$ b) $3\ x^2 + 15\ t\ x + 6 = 0$

Actividad 6: Resuelve los siguientes problemas:

a) Si se añaden 3m. de cada lado de un cuadrado determinado, su superficie se incrementará en 153 m^2. ¿Cuál era la superficie original del cuadrado?

b) Halla la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aumenta en 5 unidades a la base y se disminuye en 1 unidad la altura, el área no varía, y que la base supera a la altura en 4.

c) En los fondos de una vivienda hay un parque de 28 m. por 40m. donde se desea construir una pileta rectangular de 160 m^2. Se quiere que la franja de parque que rodeará a la misma sea de ancho uniforme. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha pileta?

d) Halla el área de un cuadrado sabiendo que si el lado se incrementa en dos unidades, su área se incrementa en 36.

Actividad 7:

Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas mixtos:

a) $\begin{cases} x = 1 - y \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + x + 4 \\ y + x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 6x^2 + x - 2 \\ y = 13x - 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = -x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5y = x^2 - 8x + 31 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = x^2 - 8x + 11 \end{cases}$

Actividad 8:

Resuelve el siguiente problema :

Cierta empresa informa que la ganancia mensual (en miles de pesos) por la venta de sus productos para el agro (en toneladas) está dada por la fórmula : $f(x) = x^2 - x$. Otra empresa del mismo rubro determina que la ganancia por la venta del mismo producto está dada por la fórmula : $f(x) = x + 3$.

a) Grafica en un mismo sistema de coordenadas la ganancia de las dos empresas en función de las toneladas vendidas.

b) Encuentra analíticamente cuántas toneladas deben vender ambas empresas para obtener la misma ganancia.

c) ¿ De cuántos miles de pesos será dicha ganancia ?.

Actividad 9:

Señala con una cruz la respuesta correcta :

Dada la función f : IR→IR tal que $f(x) = x^2 - 3x - 10$ entonces $f(-3)$ es igual a :

-28 -10 8 ninguna de las anteriores

Actividad 10:

Completa sobre la línea punteada para que las siguientes proposiciones resulten verdaderas.

a) El valor de k , para que $4x^2 + 8kx + 1 = 0$ tenga una raíz doble positiva es

k = ...

b) Si una de las raíces de la ecuación $x^2 - kx + 15 = 0$ es $x_1 = 5$, entonces

k .... y la otra raíz es $x_2 =$ ....

Actividad 11:

Dadas las funciones por tramos :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntalas gráficamente.
b) Indica el dominio y la imagen de cada una de ellas.
c) Anota para ambas, C_0, C_+, C_-
d) Si Codom f = Codom g = IR, analiza la biyectividad de f y g.

Actividad 12:

a) Escribe la fórmula y graficar una función f: IR→IR por tramos que cumpla todas las condiciones siguientes:

✓ Es constante para los x menores que -1 y pasa por el punto p = (-3;-2)
✓ Es lineal para los x mayores o iguales que -1 y menores o iguales que 2, además pasa por los puntos a=(-1;-2) y b=(2;-3)
✓ Es cuadrática para los x mayores que 2 , sus raíces son 3 y 5; además f(4)=1

b) ¿Es f inyectiva, suryectiva y/o biyectiva?
c) Si contestaste que no es inyectiva, propone un dominio y un codominio para que lo sea.
d) Si contestaste que no es suryectiva, propone un dominio y un codominio para que lo sea.
e) ¿Es f : [4;∞) →(-∞;1] biyectiva?

Claves de corrección

Unidad 3

Actividad 1: c) $\{-2\ ,\ 0\}$; $\{-2\ ,\ 2\}$; $\{-3\ ,\ 2\}$

$\{0\ ,\ 3\}$; $\{-3+i\ ,\ -3-i\}$; $\left\{-3\ ,\ \frac{3}{2}\right\}$

d) $V(-1\ ,\ -1)$; $V(0\ ,\ 8)$; $V\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{25}{4}\right)$

$V\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$; $V(-3\ ,\ -2)$; $V\left(-\frac{3}{4},\frac{81}{16}\right)$

e) Mínimo : $(-1\ ,\ -1)$; Máximo : $(0\ ,\ 8)$; Máximo : $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{25}{4}\right)$

Mínimo : $\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$; Máximo : $(-3\ ,\ -2)$; Máximo: $\left(-\frac{3}{4},\frac{81}{16}\right)$

Actividad 2: a) $\left\{3+\sqrt{5}\ ,\ 3-\sqrt{5}\right\}$ b) $\left\{-\frac{1}{4}\ ,\ 0\right\}$

c) $\left\{-2+\sqrt{5}\,i\ ,\ -2-\sqrt{5}\,i\right\}$ d) $\left\{-\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right\}$

e) $\left\{\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{5}\,a}{2}\ ,\ \frac{a}{2}-\frac{\sqrt{5}\,a}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}\,a\right\}$

Actividad 3: a) $\left\{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\ ,\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$ b) $\left\{-\frac{8}{9}\ ,\ 0\right\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\ ,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$ d) $\left\{\frac{2\sqrt{6}}{5}\ ,\ -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right\}$

e) $\left\{0\ ,\ \frac{5}{4}\right\}$

Actividad 4: $k=\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ó $k=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Actividad 5: a) i) $t=9$ ii) $t<9$ iii) $t>9$

b) i) $t = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ ó $t = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

ii) $t > \frac{2\sqrt{2}}{5}$ ó $t < -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

iii) $-\frac{2\sqrt{2}}{5} < t < \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Actividad 6: a) Superficie = 576 m^2 b) La base mide 6,25 y la altura 2,25.
c) Las dimensiones deben ser de 8 metros por 20 metros.
d) El área es 64.

Actividad 7: a) $S = \{ (-4, 5); (1, 0) \}$ b) $S = \varnothing$

c) $S = \{ (1, 5) \}$ d) $S = \{ (0, -2); (2, -2) \}$

e) $S = \{ (-1, 8); (4, 3) \}$ f) $S = \{ (2, -1) \}$

Actividad 8: b) 3 toneladas c) $ 6.000

Actividad 9: f (-3) = 8

Actividad 10: a) $k = -\frac{1}{2}$ b) $k = 8$; $x_2 = 3$

Actividad 11:
b) Dom f = IR; Im f = ($-\infty$; 2,25] $\cup$ { 4 } Dom g = Im g = IR

c) Función f: C_0 = { 0 ; 3 } ; C_+ = (0 ; 3) ; C_- ($-\infty$; 0) $\cup$ (3 ; ∞) ;
I.C= ($-\infty$;1) $\cup$ (1 ; 1,5) ; I.D= (1,5 ; ∞)

Función g : C_0 = { 1 } ; C_+ = (-2/3 ; 1) $\cup$ (1 ; ∞) ; C_- = ($-\infty$; -2/3)
I.C= ($-\infty$; 0) $\cup$ (1 ; ∞) ; I.D= (0 ; 1)

d) La función f no es inyectiva, ni suryectiva, ni biyectiva.

La función g no es inyectiva, es suryectiva, no es biyectiva.

Actividad 12 :

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in (-\infty;-1) \\ -1/3x - 7/3 & \text{si } x \in [-1;2] \\ -1.(x-3).(x-5) & \text{si } x \in (2;\infty) \end{cases}$

b) No es nada

c) Algunas posibles respuestas son $f : [-1;2] \to IR$ ó $f : (2;4] \to IR$

d) $f : IR \to (-\infty;1]$ hay otras respuestas, "achicando" el dominio.

Unidad 4: Función polinómica

Polinomios

Las expresiones de la forma $M(x) = ax^n$ donde "a" es un número real y " n " es un número entero mayor o igual que cero se llaman monomios. El número a es su coeficiente, x es la indeterminada.

Ejemplo: $8x^2$ es un monomio, su coeficiente es 8.

Un polinomio es una suma de monomios.

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a_n es el coeficiente principal (debe ser distinto de 0)
n es el grado del polinomio (es el mayor exponente)
a_0 es el término independiente

- Binomio: polinomio de 2 términos.
- Trinomio: polinomio de 3 términos.
- Cuatrinomio: polinomio de 4 términos.
- Polinomio nulo: $P(x) = 0$ no tiene grado.
- Polinomio mónico: su coeficiente principal es 1.
- Polinomio ordenado: sus términos están escritos en forma creciente o decreciente según su grado.
- Polinomio completo: tiene todas las potencias del grado.
- Polinomios iguales: 2 polinomios son iguales si los términos de igual grado (semejantes) tienen el mismo coeficiente.
- Polinomios opuestos: 2 polinomios son opuestos si los términos semejantes tienen coeficientes opuestos. El polinomio opuesto de $P(x)$ es $-P(x)$.

Especialización: cuando se reemplaza la indeterminada de un polinomio P(x) por un número real "a", se dice que el polinomio fue especializado en dicho número, se escribe P(a).

Raíces o ceros: P(a) = 0 $\Leftrightarrow$ x = a es raíz de P(x).

Función polinómica

Toda función $f: IR \to IR \,/\, f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $\quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in IR;\ n \in IN_0$ se denomina *función polinómica* de variable real, y tiene asociado un único polinomio. Siempre son continuas.

Casos especiales de funciones polinómicas:

- Función potencial: $f: IR \to IR \,/\, f(x) = ax^n, a \in IR - \{0\}, n \in IN$, es una función polinómica potencial.

- Función constante: $f(x) = a_0$ (recta horizontal)

- Función lineal: $f(x) = a_0 + a_1 x$, con $a_1 \neq 0$ (recta con pendiente no nula)

- Función cuadrática: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, con $a_2\neq 0$ (parábola)

Operaciones con polinomios

- Suma: para sumar polinomios se suman los coeficientes de los términos semejantes.
- Resta: para restar 2 polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se suma al minuendo el opuesto del sustraendo: $P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$
- Multiplicación: - para multiplicar dos monomios, se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando regla de signos y la propiedad de la potenciación $x^n . x^m = x^{n+m}$.
  - para multiplicar polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta.

Productos especiales:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	Cuadrado de un binomio
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Cubo de un binomio
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	Producto de binomios conjugados

- División: para dividir polinomios, se usa un procedimiento similar al de la división entera de números enteros.

dividendo ⟵ P(x) | Q(x) ⟶ divisor (Q(x) $\neq 0$)

resto ⟵ R(x)   C(x) ⟶ cociente

Siempre se cumple que $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ y además:

- El resto tiene menor grado que el divisor o bien es el polinomio nulo.
- El grado de C(x) es la diferencia entre los grados de P(x) y Q(x).
- Si P(x) es el polinomio nulo o su grado es menor que el de Q(x), el cociente es el polinomio nulo y el resto es igual al dividendo.

Algoritmo de la división:

- Para dividir monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas, aplicando regla de signos y la propiedad de la potenciación $x^n : x^m = x^{n-m}$

- Para dividir dos polinomios se siguen estos pasos:

1°) Se ordena en forma decreciente dividendo y divisor, y se completa el dividendo.
2°) Se divide el 1^er término del dividendo por el 1^er término del divisor, el resultado es el término de mayor grado del cociente.
3°) Se multiplica ese resultado por cada término del divisor y dicho producto se resta al dividendo.
4°) Se reinicia el proceso a partir del resultado de la última resta (o suma del polinomio opuesto).

Observación: si al dividir P(x) por Q(x) se obtiene cociente C(x) y R(x) = 0 decimos que:

- la división es exacta P(x) = Q(x) . C(x)

- P(x) es múltiplo de Q(x)
- P(x) es divisible por Q(x)
- Q(x) es divisor de P(x)
- Q(x) divide a P(x)

Regla de Ruffini:

Es un método abreviado para hacer la división, usando solo los coeficientes de los polinomios. Se puede utilizar cuando el divisor es de la forma x - a, a $\in$ IR.
Ejemplo: Para hacer $(2x^3 - 3x + 4) : (x + 1)$ se procede así:

		2	0	-3	4	
Opuesto del TI del divisor $\longrightarrow$	-1		-2	2	1	
		2	-2	-1	5	$\longrightarrow$ RESTO

$C(x) = 2x^2 - 2x - 1$

- El coeficiente principal se "baja" sin modificarlo y luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente (TI) del divisor y se suma con el 2^{do} coeficiente y así sucesivamente.
- Los números así obtenidos son los coeficientes del cociente y el ultimo valor es el resto.
- El polinomio cociente es un grado menor que el dividendo.

Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio P(x) por otro de la forma (x-a) coincide con P(a).

Consecuencias del teorema del resto

- Un polinomio P(x) es divisible por x-a $\Leftrightarrow$ a es raíz de P(x).
- Si x_1, x_2, …, x_i son las raíces reales del polinomio P(x) , entonces existe otro polinomio M(x) tal que: P(x) = M(x) .(x - x_1).(x - x_2)…(x - x_i)
- Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

Teorema de Gauss

Si una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal (CP).

Factorización de polinomios

- Polinomio primo: un polinomio de grado n mayor o igual que 1 es primo o irreducible si no puede ser expresado como producto de polinomios de grado menor que n.
- Polinomio compuesto: un polinomio que no es primo se dice compuesto.

Ejemplos: $2x - 6 = 2\,(x - 3)$ primo
$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ compuesto

Un polinomio esta factorizado cuando se lo expresa como producto entre su coeficiente principal y polinomios primos mónicos.

Ejemplos: P(x) = $x^3 + 4x + 5$ para factorizarlo puede procederse así:

1°) Buscar una raíz de P(x), en este caso, usaremos Teorema de Gauss
Divisores del TI (5): $\pm 1 , \pm 5$

Divisores del CP (1): ± 1

Posibles raíces: $\pm 1 , \pm 5$

$P(1) \neq 0$

$P(-1) = 0 \rightarrow -1$ es raíz de P(x)

2°) Según consecuencia del teorema del resto, si -1 es raíz de P(x) $\rightarrow$ x + 1 es divisor de P(x).

3°) Dividamos P(x) por x + 1 empleando Ruffini

	1	0	4	5
-1		-1	1	-5
	1	-1	5	0

Entonces P(x) : (x + 1) = $x^2 - x + 5$

4°) Escribamos a P(x) como producto entre el divisor del paso 2°) y el cociente del paso 3°)

P(x) = $(x^2 - x + 5)(x + 1)$

<u>Aclaración:</u> (x + 1) es primo, habría que ver si $x^2 - x + 5$ es primo o compuesto; si fuese compuesto debe seguir factorizándose. Para ello pueden ser útiles otros casos de factoreo:

- Factor común: es lo contrario de aplicar propiedad distributiva
  Se extrae el factor que se repite en todos los términos del polinomio

  - de la indeterminada: ésta con el menor exponente
  - de los coeficientes: el máximo común divisor o el coeficiente principal si se desea un polinomio mónico

Ejemplo: $12x^3 - 30x^2 + 48x^5 = 6x^2\,(2x - 5 + 8x^3)$

$$= 48x^2 \underbrace{\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{8} + x^3\right)}_{\text{polinomio mónico}}$$

- Factor común por grupos: se aplica cuando el polinomio se puede separar en grupos de igual cantidad de términos de modo que en cada grupo haya factores comunes. Se los extrae y luego se vuelve a extraer un factor común de los grupos obtenidos.

  Ejemplo: $\underbrace{x^3 - 7x^2}_{f\ común\ x^2} + \underbrace{3x - 21}_{f\ común\ 3} = \underbrace{x^2(x-7) + 3(x-7)}_{f\ común\ x-7} = (x-7)(x^2+3)$

- Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- Cuatrinomio cubo perfecto: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
- Trinomio de 2do grado: $P(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$; a $\neq 0, x_1$ y x_2 raíces de P(x).

Unidad 4

Actividad 1:

Grafica en un mismo sistema de coordenadas :

a) $y = x^2$ b) $y = x^4$ c) $y = -x^4$

Indica dominio e imagen.
Compara los gráficos y extrae conclusiones.
Completa : C_0 =................ C_+ = ... C_- = ...
Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y/ o mínimos si los hay.

Actividad 2:

Grafica en un mismo sistema de coordenadas :

a) $y = x^3$ b) $y = x^5$

Indica dominio e imagen.
Compara los gráficos y extrae conclusiones.
Completa : C_0 =................ C_+ = ... C_- = ...
Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y/ o mínimos si los hay.

Actividad 3:

Grafica en un mismo sistema de coordenadas :

a) $y = -x^3$ b) $y = -x^3 - 2$

Indica dominio e imagen.
Compara los gráficos y extrae conclusiones.
Completa : C_0 =................ C_+ = ... C_- = ...
Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y/ o mínimos si los hay.

Actividad 4:

Marca con una cruz la alternativa correcta en cada caso :

4.1- Sea $f: IR \to IR / f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x^4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ entonces f(x) = 16 si:

a) x = 2 ó x = -2 b) x = 2 c) x = -2 d) no existe x

4.2- Sea $f: IR \to IR / f(x) = \begin{cases} -x^4 + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ entonces f (-2) + f (-1) es igual a :

a) -14 b) 20 c) 18 d) -12 e) ninguna de las anteriores

Actividad 5:

Indica que expresiones son polinomios , en caso afirmativo, ¿ cuál es el grado ?.

a) $5x^3 - 2x^6 + \frac{1}{3}x + 7 - x^5$

b) $-x^4 - 2x + \frac{2}{5}x^2 - \sqrt{2}\,x^3$

c) $-3x^2 - 2x + \frac{5}{x}$

d) $7x^4 + x^2 + \frac{6}{5} - 4x^5 - x^3$

e) $2x^{-4} - 5x^3 + x^2 - x$

f) $-x^2 - 0{,}2x^3 + 1$

Actividad 6:

Dado el siguiente polinomio $P(x) = -9x^5 + 6x - \sqrt{3} + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3$, completa :

El coeficiente del término lineal es ....
El término independiente es ....
El grado del polinomio es ....
El término cuadrático es ....
El coeficiente del término de quinto grado es............

Actividad 7:

Encuentra los valores de a, b, c y d para que los polinomios P y Q sean iguales:

a) $P(x) = 2x - 1 - \frac{1}{4}x^2$, $Q(x) = bx^2 + 2d + (a+2)x^3 + (a+c)x$

b) $P(x) = -bx + c + 3x^2$, $Q(x) = bx^2 + 2d + (a-2c)x^3 + (a+c)x$

Actividad 8:

Dados los siguientes polinomios: $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$
$R(x) = 6$, $S(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + x - 3$, $T(x) = 1$

Efectúa las siguientes operaciones :

a) $P(x) + Q(x) =$
b) $P(x) + Q(x) - T(x) =$
c) $2 . P(x) + x . Q(x) - S(x) =$
d) $P(x) . Q(x) =$
e) $P(x) . [S(x) + Q(x)] =$

f) $R(x) \cdot S(x) - P(x) \cdot Q(x) + T(x) =$
g) $Q(x) : P(x) =$
h) $S(x) : Q(x) =$
i) $P^2(x) =$
j) $\left[T(x) - x \cdot R(x) \right]^2 =$
k) $P^3(x) =$
l) $\left[T(x) - x \cdot R(x) \right]^3 =$
m) $P(x) \cdot (2x - 3) =$
n) $\left[\frac{1}{2} x - R(x) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} x + R(x) \right]$

Actividad 9:

Dados los siguientes polinomios: $P(x) = 2x^5 - 3x^3 - 6x$,
$Q(x) = x^2 + x - 1$ y $R(x) = \frac{1}{2} x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 5x + 3$

Halla :

a) $P(x) + R(x) =$
b) $P(x) \cdot Q(x) =$
c) $R(x) - P(x) \cdot Q(x) =$
d) $P(x) : Q(x) =$

Actividad 10:

Encuentra los valores de a, b y c, para que $P(x) \cdot Q(x) = R(x)$.
$P(x) = ax + 2x^3$, $Q(x) = x + c + bx^3$, $R(x) = 4x^6 + 4x^4 + x^2$

Actividad 11:

Dados los polinomios : $P(x) = 3x^6 + 2x^4 - \frac{9}{4} x^3 - x - 6x^5 + 2$,
$Q(x) = x - 2$, $R(x) = -\frac{5}{2} x^5 + 6x^4 - \frac{3}{2} x^6 + 17x + 5x^2 + 6$ y
$S(x) = x + 3$.

Halla : a) $P(x) : Q(x)$, b) $R(x) : S(x)$ (aplicando Regla de Ruffini)
Verifica el resto mediante el Teorema del Resto.

Actividad 12:

Especializa el polinomio $P(x) = 6x - 9 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2$ en cada uno de los números dados, y selecciona aquellos que son raíces del mismo.

1 , -1 , 0 , $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$

raíces de $P(x)$ = ...

Actividad 13:

Decide sin efectuar la división si T (x) es divisor de S (x).

$S(x) = x^6 + x^7 - 7x^4 - 8x^3 - 8x$, $T(x) = x + 2$

Actividad 14:

Halla los valores de a para los cuales $P(x) = ax^2 + x^3 - 3x + 10$ es divisible por $Q(x) = x + 5$.

Actividad 15:

a) Encuentra las cuatro raíces reales de $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x$, y factoriza P (x).

b)Encuentra las tres raíces reales de $P(x) = x^3 - 14x^2 + 65x - 100$, y factoriza P (x).

c) Encuentra las raíces reales de $P(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 - 16x + 32$, sabiendo que P (x) es divisible por $x^2 - 16$. Factoriza P (x) .

d) Encuentra todas las raíces reales de $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$. Factoriza P (x) .

Actividad 16:

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{9}{4}x^3 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{27}{8}x^2 =$

c) $\frac{9}{4}x^4 - 25 =$

d) $x^3 + x - 5x^4 - 5x^2 =$

e) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 =$

f) $x^5 - 32 =$

g) $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 =$

h) $169\ x^{12} - \frac{1}{49} =$

i) $2x^3 - 54 =$

Claves de corrección

Unidad 4

Actividad 1: a) Dom f = IR Im f = $[0, +\infty)$
$C_0 = \{0\}$ $C_+ = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Intervalo de crecimiento = $(0, +\infty)$ Intervalo de decrecimiento = $(-\infty, 0)$
Mínimo : $(0, 0)$

b) Dom f = IR Im f = $[0, +\infty)$
$C_0 = \{0\}$ $C_+ = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Intervalo de crecimiento = $(0, +\infty)$ Intervalo de decrecimiento = $(-\infty, 0)$
Mínimo : $(0, 0)$

c) Dom f = IR Im f = $(-\infty, 0]$
$C_0 = \{0\}$ $C_- = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Intervalo de crecimiento = $(-\infty, 0)$ Intervalo de decrecimiento = $(0, +\infty)$
Máximo : $(0, 0)$

Actividad 2: a) Dom f = IR Im f = IR
$C_0 = \{0\}$ $C_+ = (0, +\infty)$ $C_- = (-\infty, 0)$
Intervalo de crecimiento = $(-\infty, +\infty)$
No tiene máximo ni mínimo.

b) Dom f = IR Im f = IR
$C_0 = \{0\}$ $C_+ = (0, +\infty)$ $C_- = (-\infty, 0)$
Intervalo de crecimiento = $(-\infty, +\infty)$
No tiene máximo ni mínimo.

Actividad 3: a) Dom f = IR Im f = IR
$C_0 = \{0\}$ $C_+ = (-\infty, 0)$ $C_- = (0, +\infty)$
Intervalo de decrecimiento = $(-\infty, +\infty)$
No tiene máximo ni mínimo.

b) Dom f = IR Im f = IR
$C_0 = \left\{\sqrt[3]{-2}\right\}$ $C_+ = \left(-\infty, \sqrt[3]{-2}\right)$ $C_- = \left(\sqrt[3]{-2}, +\infty\right)$
Intervalo de decrecimiento = $(-\infty, +\infty)$
No tiene máximo ni mínimo.

Actividad 4:
4.1- b)
4.2- d)

Actividad 5: a) si grado 6
b) si grado 4
c) no
d) si grado 5
e) no
f) si grado 3

Actividad 6: $6 \;;\; -\sqrt{3} \;;\; 5 \;;\; 4x^2 \;;\; -9$

Actividad 7: a) $a = -2 \;;\; b = -\frac{1}{4} \;;\; c = 4 \;;\; d = -\frac{1}{2}$

b) $a = -2 \;;\; b = 3 \;;\; c = -1 \;;\; d = -\frac{1}{2}$

Actividad 8: a) $P(x) + Q(x) = x^2 - x + 4$

b) $P(x) + Q(x) - T(x) = x^2 - x + 3$

c) $2 \, . \, P(x) + x \, . \, Q(x) - S(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 4x + 9$

d) $P(x) \, . \, Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 3$

e) $P(x) \, . \left[S(x) + Q(x) \right] = x^4 + \frac{15}{2}x^3 + 5x^2 - 10x - 6$

f) $R(x) \, . \, S(x) - P(x) \, . \, Q(x) + T(x) = x^3 + 15x^2 + 13x - 20$

g) $Q(x) : P(x) = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$; resto : $\frac{31}{4}$

h) $S(x) : Q(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; resto : $11x - \frac{13}{2}$

i) $P^2(x) = 4x^2 + 12x + 9$

j) $\left[T(x) - x \, . \, R(x)) \right]^2 = 1 - 12x + 36x^2$

k) $P^3(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

l) $\left[T(x) - x \, . \, R(x)) \right]^3 \; 1 - 18x + 108x^2 - 216x^3$

m) $P(x) \, . \, (2x - 3) = 4x^2 - 9$

n) $\left[\frac{1}{2}x - R(x) \right] \, . \left[\frac{1}{2}x + R(x) \right] = \frac{1}{4}x^2 - 36$

Actividad 9: $P(x) + R(x) = \frac{5}{2}x^5 - 6x^4 - x + 3$

$P(x) \, . \, Q(x) = 2x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x$

$R(x) - P(x) \, . \, Q(x) = -2x^7 - 2x^6 + \frac{11}{2}x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 - x + 3$

$P(x) : Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3$; resto : $-2x - 3$

Actividad 10: $a = 1 \; ; \; b = 2 \; ; \; c = 0$

Actividad 11: a) $C(x) = 3x^5 + 2x^3 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + 6 \quad ; \quad R(x) = 14$

b) $C(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 2x^4 + 5x + 2 \quad ; \quad R(x) = 0$

Actividad 12: raíces de $P(x)$: $\frac{3}{2}$

Actividad 13: $T(x)$ no es divisor de $S(x)$

Actividad 14: $a = 4$

Actividad 15: a) $C_0 = \left\{ -\sqrt{3}, 0, 1, \sqrt{3} \right\}$

$P(x) = x \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - 1)$

b) $C_0 = \{ 4, 5 \}$

$P(x) = (x - 4) \cdot (x - 5)^2$

c) $C_0 = \{ -4, -2, 1, 4 \}$

$P(x) = (x - 4) \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

d) $C_0 = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$

$P(x) = x \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 + 1)$

Actividad 16:

a) $\left(3x - \frac{1}{2} \right)^2$

b) $\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\frac{9}{2}x - 7x^2 + \frac{27}{4} \right)$

c) $\left(\frac{3}{2}x^2 - 5 \right) \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 + 5 \right)$

d) $x \cdot (1 - 5x) \cdot (x^2 + 1)$

e) $(3x + 1)^3$

f) $(x - 2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

g) $2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

h) $\left(13x^6 - \frac{1}{7} \right) \cdot \left(13x^6 + \frac{1}{7} \right)$

i) $2 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$

Unidad 5: Función racional

Expresiones algebraicas racionales

Así como se define a los números racionales como los números de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros (b≠0), se define como expresiones racionales a aquellas cuya forma es $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) no es el polinomio nulo.

Simplificación de expresiones racionales

Es posible simplificar una expresión racional cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, de lo contrario, la expresión racional es *irreducible.*

Ej: Consideremos la expresión racional $\frac{2x^2+2x-4}{x^3+3x^2-4}$. Una vez factorizados su numerador y su denominador, se puede expresar así: $\frac{2(x+2)\ (x-1)}{(x+2)^2(x-1)}$ y luego de simplificar todos los factores comunes, se obtiene $\frac{2}{x+2}$. Debe tenerse en cuenta que la simplificación realizada es válida para todo número real excepto para aquellos que anulen los factores simplificados. En este ejemplo, se simplificaron los factores x+2 y x-1 los cuales resultan iguales a cero respectivamente para -2 y 1, por lo tanto la simplificación realizada vale $\forall x \in IR - \{-2,1\}$

Función racional

Una función racional responde a la forma $f: A \rightarrow IR \,/\, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) ≠ 0.

- Dominio: el dominio A de la función racional es el conjunto de todos los valores de la variable que no anulan al denominador.

  Ej: El dominio de $f(x) = \frac{x}{x^2-3}$ *es* $IR - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$
- Raíces: las intersecciones del gráfico de una función racional f(x) con el eje x se producen para los valores de x que anulan la función, es decir para aquellos que anulan al numerador y pertenecen al dominio de f. Esos valores de x, si existen, son los ceros o raíces de f(x).

  Ej: para hallar las raíces de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ cuyo dominio es Dom (f) = IR – {-1}, se debe resolver la ecuación f(x) = 0, es decir:

  $$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0.(x+1)^2 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ ó } x=-1$$

  De los valores hallados debe descartarse el -1 por no pertenecer al dominio de la función, por lo tanto, el conjunto de ceros de f es $C_0 = \{1\}$.

- Asíntotas verticales: si a є IR es un cero del denominador de una función racional f(x) pero no anula al numerador, entonces la recta de ecuación x = a es una asíntota vertical de f(x).

  Ej : la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ tiene una sola asíntota vertical que es x = 3. No hay asíntota vertical en x = -3 porque, si bien -3 anula al denominador de f(x), también anula al numerador.

- Asíntotas horizontales: para hallar las asíntotas horizontales de una función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, puede utilizarse el siguiente esquema:

Grados	Asíntota horizontal
1) gr (P(x)) < gr(Q(x))	y=0
2) gr (P(x)) = gr(Q(x))	$y=\dfrac{coeficiente\ principal\ de\ P(x)}{coeficiente\ principal\ de\ Q(x)}$
3) gr (P(x)) > gr(Q(x))	No tiene

Ej: la asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{8-5x}{2x-1}$ *es* $y=-\dfrac{5}{2}$ porque los polinomios numerador y denominador son del mismo grado, entonces se aplica el caso 2).

Construcción del gráfico de una función racional

Para graficar una función racional f(x), se pueden seguir estos pasos:

1°) Se indica el dominio de f(x) a partir de su fórmula original.

2°) Se estudia si la expresión racional de f(x) es reducible. Si no lo es, se pasa al paso 3°). En caso de ser reducible, se simplifica obteniendo la expresión de una *nueva función s(x).* Se indica su dominio. A partir del gráfico de s(x) se obtiene el gráfico de f(x): el gráfico de f(x) es idéntico al de s(x) **excepto** *en los valores de x que pertenecen al dominio de s(x) pero no al de f(x)*. En esos valores de x, el gráfico de f(x) tiene "agujeros".

3°) Se analiza si la función tiene asíntotas verticales. En caso de que existan, se escriben sus ecuaciones y se trazan en el gráfico con una línea punteada.

4°) Se analiza si la función tiene asíntota horizontal. Si existe, se escribe su ecuación y se traza en el gráfico con una línea punteada.

5°) Se puede construir una tabla de valores dándole a "x" algunos valores anteriores y otros posteriores a cada asíntota vertical.

6°) Se traza el gráfico de f(x) de modo que la curva pase por los puntos marcados y se aproxime a las asíntotas, si es que existen.

Ej 1: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

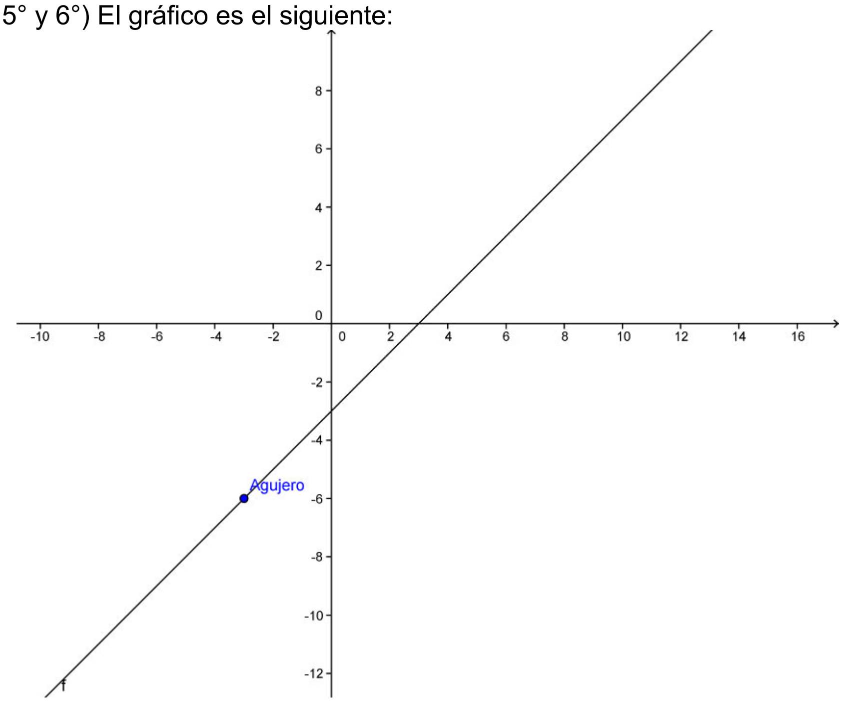
1°) El dominio es dom (f) = IR – {-3}

2°) La función es reducible y luego de simplificarla se obtiene la nueva función s(x) = x – 3 cuyo dominio es dom (s) = IR. Como x = -3 pertenece al dominio de s pero no al de f, en ese punto hay un "agujero". Las coordenadas del agujero son (-3,s(-3)) = (-3,-6)

3°) f(x) no tiene asíntota vertical porque x = -3 que anula al denominador, también anula al numerador.

4°) f(x) no tiene asíntota horizontal ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

5° y 6°) El gráfico es el siguiente:



Ej 2: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$

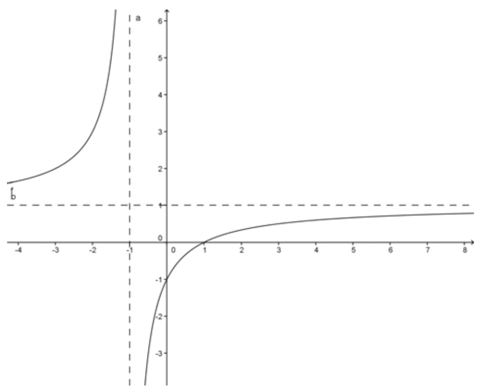
1°) El dominio es dom (f) = IR – {-1}

2°) La función es reducible y luego de simplificarla se obtiene la nueva función $s(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ cuyo dominio es dom (s) = IR – {-1} . Como los dominios no tienen valores donde difieran, la función f(x) no tiene agujeros.

3°) f(x) tiene asíntota vertical en x = -1 porque si bien -1 anula al numerador y al denominador, luego de simplificar, el -1 sigue anulando al denominador (y no al numerador); esto se debe a la multiplicidad 2 de la raíz -1 en el denominador.

4°) La asíntota horizontal es y = 1

5° y 6°) El gráfico es el siguiente:



Ecuaciones racionales

Una ecuación racional es una ecuación que puede escribirse de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, Q(x) ≠ 0.

Cuando se buscan los ceros o raíces de una función racional, se está resolviendo una ecuación racional.

Ej: $\frac{x-4}{x^2-5x} = \frac{2}{x^2-25}$ es una ecuación racional. Para resolverla, primero puede realizarse un pasaje de términos: $\frac{x-4}{x^2-5x} - \frac{2}{x^2-25} = 0$ y ahora se factorizan los denominadores para obtener: $\frac{x-4}{x(x-5)} - \frac{2}{(x+5)(x-5)} = 0$. Para poder restar, se busca el común denominador que es x(x+5)(x-5) y se opera: $\frac{(x-4)(x+5)-2x}{x(x+5)(x-5)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-20-2x}{x(x+5)(x-5)} = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)} = 0$ (*) En este paso se puede apreciar que tiene la forma de una ecuación racional: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Resolver esta ecuación es como buscar los ceros de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)}$, que se llama *función racional asociada* a la ecuación. Su *dominio* es Dom (f) = IR – { 0, -5, 5 }. Si al resolver la ecuación se obtiene como resultado algún valor no perteneciente al dominio de la función racional asociada, debe descartarse del conjunto solución.

Volviendo a (*), se resuelve como ya se mostró en el ejemplo de cálculo de raíces de una función racional:

$\frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)} = 0 \Rightarrow x^2-x-20 = 0 \Rightarrow$ resolviendo la ecuación con fórmula resolverte se obtienen las soluciones $x_1 = 5$ ó $x_2 = -4$ de las cuales se descarta el 5 porque no pertenece al dominio de la función racional asociada, entonces S = {-4}

Unidad 5

Actividad 1:

i) Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando previamente dominio, raíces e intersecciones con el eje y.

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ e) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

ii) Escribe la imagen, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los conjuntos de positividad y negatividad y las ecuaciones de las rectas asíntotas.

Actividad 2:

Determina el dominio de cada expresión algebraica racional y luego simplifica:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x}{x^2-x}$ c) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$

Actividad 3:

Resuelve las ecuaciones teniendo en cuenta el dominio de la función racional asociada a cada una :

a) $1+\dfrac{1}{x-1}=x$

b) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x}=1$

c) $\dfrac{1}{x-1}+x=\dfrac{x^2+1}{x}$

d) $\dfrac{7}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}=5$

e) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-2x}$

f) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{x}$

g) $\dfrac{7}{t+1}-\dfrac{3}{t-1}=\dfrac{1+4t^2}{t^3-t}$

Actividad 4:

Simplifica : $\dfrac{x^3+1}{3x^2-3x+3}=$

Actividad 5:

Resuelve :

a) $\left(\dfrac{2x}{x^2+6x+9}-\dfrac{3}{x^2-9}\right) : \dfrac{x+1}{x^3+3x^2-x-3}=$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^9}{\left(x^3+3x^2\right)^3}}=$

Actividad 6:

Resuelve analíticamente los siguientes sistemas mixtos:

a) $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 2 \\ 2x - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

Actividad 7:

a) Encuentra dos números sabiendo que su suma es $\frac{9}{2}$ y su producto es 2.

b) ¿ Cuánto miden el largo y el ancho de un rectángulo cuyo perímetro es de 46 cm y su superficie es de 120 cm ^{2} ?.

Actividad 8:

Señala con una cruz la respuesta correcta :

La solución de la ecuación $\dfrac{12}{x^2 - 4} + \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{3}{x-2}$ es :

a) x = 2 y x = 3 b) x = - 2 y x = - 3 c) x = 2

d) x = 3 e) ninguna de las anteriores

Actividad 9:

Para la función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } x \in [0;2) \\ (x-2)^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Grafícala en un sistema de coordenadas.
b) Anota dominio, imagen, C_0, C_+, C_-, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, ecuaciones de las rectas asíntotas.

Claves de corrección

Unidad 5

Actividad 1:

i) a) Dom f (x) = IR – { 0 } ; Raíces: no tiene ; Intersección con el eje y = ∅
b) Dom f (x) = IR – { 2 } ; Raíces: x = -1/2 ; Intersección con eje y: {(0 ; -1/2)}
c) Dom f (x) = IR – { 0 } ; Raíces: no tiene ;Intersección con el eje y = ∅
d) Dom f (x) = IR – { 1 } ; Raíces: x = 0 ; Intersección con el eje y = {(0 ; 0)}
e) Dom f (x) = IR – { -1,1 } ; Raíces: x = -2 ; Intersección con el eje y = {(0 ; 2)}

ii) a) Im f = IR – { 0 } ; I.C = IR – { 0 } ; I.D = ∅ ; C_+ = (-∞ ; 0) ; C_- = (0 ; ∞)
Asíntotas: x = 0 ; y = 0
b) Im f = IR – { 2 } ; I.C = ∅ ; I.D = IR – { 2 } ; C_+ = (-∞ ; -1/2) ∪ (2 ; ∞) ; C_- = (-1/2 ; 2)
Asíntotas: x = 2 ; y = 2
c) Im f = (0 ; ∞) ; I.C = (-∞ ; 0) ; I.D = (0 ; ∞) ; C_+ = (-∞ ; 0) ∪ (0 ; ∞) ; C_- = ∅
Asíntotas: x = 0 ; y = 0
d) Im f = IR – { 1 } ; I.C = IR – { 1 } ; I.D = ∅ ; C_+ = (0 ;1) ∪ (1 ; ∞) ; C_- = (-∞ ; 0)
Asíntotas: no tiene
e) Im f = IR – { 1; 1,5 } ; I.C = ∅ ; I.D = IR – { -1 ; 1 }
C_+ = (-∞ ; -2) ∪ (-1 ; 1) ∪ (1 ; ∞) ; C_- = (-2 ; -1)
Asíntotas: x = -1 ; y = 1

Actividad 2:

a) Dom f (x) = IR $-\left\{-1,1\right\}$; $\dfrac{x-1}{x+1}$

b) Dom f (x) = IR $-\left\{0,1\right\}$; $\dfrac{1}{x-1}$

c) Dom f (x) = IR ; $x+2$

Actividad 3:

a) Dom f (x) = IR $-\left\{1\right\}$; $S=\left\{0,2\right\}$

b) Dom f (x) = IR $-\left\{0,1\right\}$; $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

c) Dom f (x) = IR $-\left\{0,1\right\}$; $S=\left\{\ \right\}$

d) Dom f (x) = IR $-\left\{-1,1\right\}$; $S=\left\{-\dfrac{3}{5},\ 2\right\}$

e) Dom $f(x) = IR - \{-2, 0, 2\}$; $S = \{-1\}$

f) Dom $f(x) = IR - \{0, -1\}$; $S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

g) Dom $f(x) = IR - \{-1, 0, 1\}$; $S = \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

Actividad 4: $\frac{x+1}{3}$

Actividad 5:

a) $\frac{(2x^2 - 9x - 9).(x-1)}{x^2 - 9}$; la simplificación es válida $\Leftrightarrow$ $x \neq -1$ y $x \neq -3$

b) $\frac{2x}{x+3}$; la simplificación es válida $\Leftrightarrow$ $x \neq 0$

Actividad 6:

a) $S = \{(2, 2), (-1, -4)\}$

b) $S = \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}$

c) $S = \left\{ (1, 1), \left(\frac{1}{4}, -2 \right) \right\}$

Actividad 7:

a) Los números son $\frac{1}{2}$ y 4.

b) El largo y el ancho miden 8 cm y 15 cm.

Actividad 8: La respuesta correcta es la d).

Actividad 9: b) Dom f = IR ; Im f = $[-4 ; \infty)$

$C_0 = \{0 ; 4\}$; $C_+ = (-\infty ; 0) \cup (4 ; \infty)$; $C_- = (0 ; 4)$

I.C = $(-\infty ; 0) \cup (2 ; \infty)$; I.D = $(0 ; 2)$

Asíntotas : $x = 0$; $y = 0$

Unidad 6: Función exponencial y logarítmica

Función exponencial

Se denomina función exponencial a toda función de la forma:

$$f: IR \rightarrow IR \;/\; f(x) = k.a^x \quad \text{con } a \in IR^+ - \{1\} \quad y \quad k \in IR - \{0\}$$

- Si $k = 1$ se obtiene $f(x) = a^x$

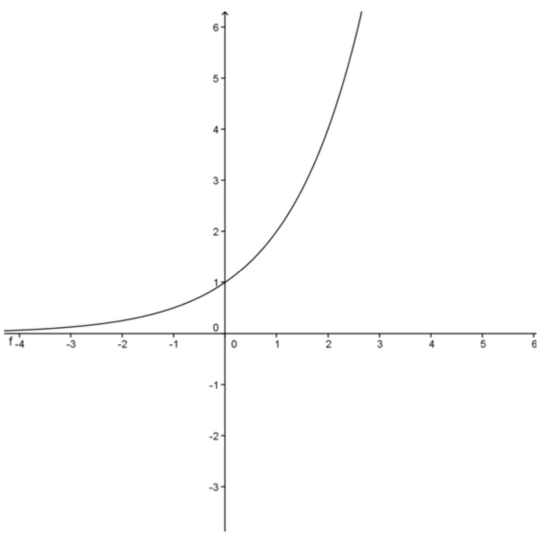
Características:
- $f(0) = 1$
- $f(1) = a$
- Tiene asíntota horizontal en $y = 0$
- Dom $f = IR$
- Im $f = IR^+$
- f es continua en todo su dominio

Para estas funciones se distinguen dos casos:

1) $0 < a < 1$

La función resulta *decreciente*.

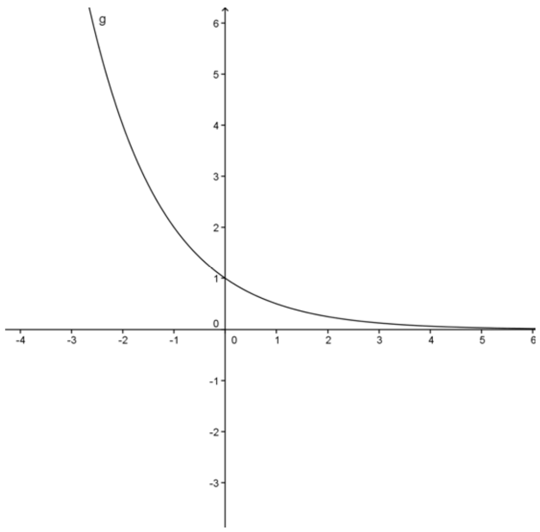
Ej: el gráfico de $f(x) = 2^x$ es el siguiente:



2) $a > 1$

La función resulta *creciente*.

Ej: el gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es el siguiente:



- Si $k = 1$ y $a = e$ se obtiene $f(x) = e^x$ llamada *función exponencial natural*

El número e es irracional y dado que $2 < x < 3$, la gráfica de $f(x) = e^x$ quedará comprendida entre los gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ con características similares.

Logaritmación

La logaritmación es una operación entre dos números reales "a" y "b" llamados *base* y *argumento* respectivamente, que se define como:

$$\mathbf{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b} \quad \text{con } a \in IR^+ - \{1\} \text{ y } b \in IR^+$$

Ej: 1) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

2) $\log_2 \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4}$

3) $\log_9 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial: el *decimal* o de base 10, que se simboliza $\log_{10} b$ = **log b**; y el **natural** o de base e que se simboliza $\log_e b$ = **ln b**

Propiedades de la logaritmación

Para a,c є $IR^+ - \{1\}$; x,y,b є IR^+

- $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$
- $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ Ej: $\log (100.100) = \log 100 + \log 100$
  $\log (10000) = 2 + 2$
  $4 = 4$
- $\log_a (x:y) = \log_a x - \log_a y$ Ej: $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8$
  $-3 = 0 - 3$
  $-3 = -3$
- $\log_a b^n = n. \log_a b$ Ej: $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3. \log_5 5 = 3.1 = 3$
- $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$ Ej: $e^{\ln 5} = 5$
- Para calcular logaritmos en los cuales el argumento no es potencia de la base, se debe recurrir a un *cambio de base*, utilizando logaritmos con base convenientes o logaritmos decimales o naturales, los cuales pueden resolverse con calculadora científica:
  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$
  Ej: 1) $\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$ 2) $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} \cong \frac{0,477}{0,699} \cong 0,682$

Función logarítmica

Sea f: $IR^+ \rightarrow IR$ se llama función logarítmica de base "a" a la función inversa de la exponencial, definida por:

$$\mathbf{f(x) = \log_a x} \quad \text{con } a \in IR^+ - \{1\}$$

Ejemplos:

- Si f: $IR \rightarrow IR^+$ / $f(x) = 10^x \Rightarrow f^{-1}(x)$: $IR^+ \rightarrow IR$ / $f^{-1}(x) = \log x$

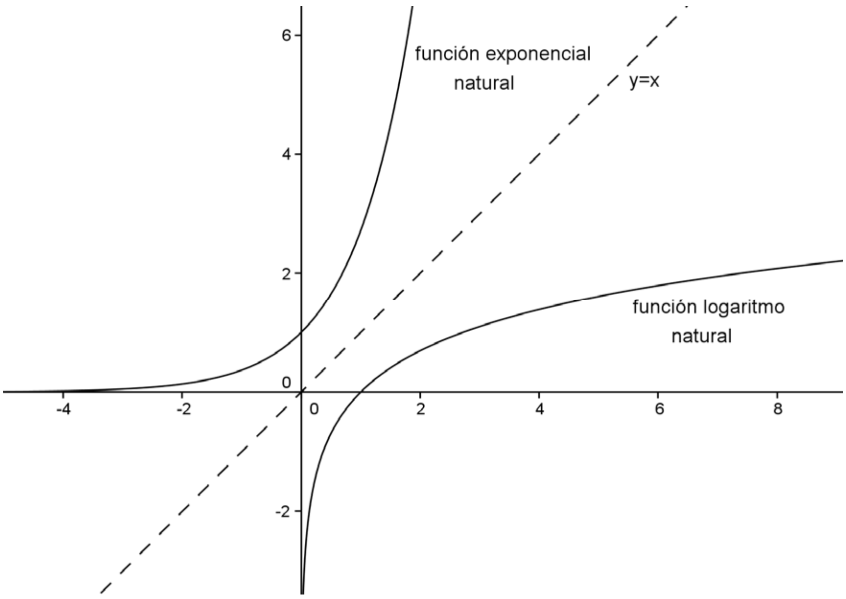
- Si f: $IR \rightarrow IR^+$ / $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x)$: $IR^+ \rightarrow IR$ / $f^{-1}(x) = \ln x$

A continuación se muestra el gráfico de la función exponencial natural $f(x) = e^x$ y el de la función logaritmo natural $f^{-1}(x) = \ln x$.

Para realizar la tabla de valores de la función inversa, una vez hecha la de la función, pueden intercambiarse las abscisas y las ordenadas entre sí. Ya se vio que el punto de coordenadas (0,1) pertenece a $f(x) = e^x$, entonces el punto (1,0) pertenece a $f^{-1}(x) = \ln x$.

Los gráficos de $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$ (como siempre que se grafique una función y su inversa) resultan simétricos respecto a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante (y = x).

En gráfico anterior se observó que y = 0 es asíntota de la función exponencial, se puede observar en este gráfico que x = 0 es asíntota vertical de y = ln x (válido para todo "a")



<u>Ecuaciones exponenciales</u>

Una ecuación es *exponencial* cuando la incógnita de la misma forma parte de algún exponente. Para resolver una ecuación exponencial, se debe tener presente que:

a) Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias de una misma base y tener en cuenta la propiedad: $a^m = a^n \Rightarrow m = n$, $a \in IR - \{0, 1, -1\}$
b) Se puede aplicar la logaritmación de igual base en ambos miembros de la igualdad.

Ej:

1) Para hallar el valor de "x" tal que f(x) = 16, siendo $f(x) = 2^x$, se debe plantear la ecuación $2^x = 2^4 \Rightarrow$ **x = 4** (se aplicó la propiedad mencionada en a)).

2) Para resolver la ecuación $2^{x-1} = 3$, como no es posible expresar ambos miembros en una misma base, se aplica logaritmación de base 10 (puede ser en otra base) miembro a miembro de la igualdad: $\log 2^{x-1} = \log 3 \Rightarrow (x-1).\log 2 = \log 3$ (se aplicó la propiedad $\log_a b^n = n.\log_a b$)
$x - 1 = (\log 3):(\log 2) \Rightarrow x - 1 \cong 1{,}585 \Rightarrow$ **$x \cong 2{,}585$**

3) En la ecuación $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9^{x-2}$ primero se expresan ambos miembros con potencias de base 3: $(3^{-1})^{2x} = (3^2)^{x-2}$ y ahora se aplica la propiedad potencia de otra potencia, obteniendo:
$3^{-2x} = 3^{2(x-2)}$ teniendo en cuenta la propiedad a), se igualan los exponentes:
$-2x = 2(x - 2)$ de donde $-2x = 2x - 4 \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow$ **x = 1**

4) Para resolver una ecuación como la siguiente: $2^{x+2} + 2^x = 40$, con sumas y/o restas de potencias de la misma base, se aísla 2^x en cada término y luego se extrae 2^x como factor común como se muestra a continuación:
$2^{x+2} + 2^x = 40 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x = 40 \Rightarrow 2^x(2^2 + 1) = 40 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 40 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$
$\Rightarrow$ **x = 3**

<u>Ecuaciones logarítmicas</u>

Una ecuación es *logarítmica* cuando la incógnita se encuentra en el argumento de algún logaritmo.
Para resolverlas, se debe tener presente que:

a) Se puede aplicar la definición de logaritmo para despejar la incógnita.
b) Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, empleando propiedades.
c) Solo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse del conjunto solución aquellos valores que no verifiquen la ecuación original.

Ej:

1) $\log_2 (x-3) = -1 \Rightarrow 2^{-1} = x-3 \Rightarrow \frac{1}{2} = x-3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{7}{2}$

2) $\log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2 \Rightarrow \log_3 [(x+4).(x-4)] = 2 \Rightarrow \log_3 (x^2-16) = 2 \Rightarrow$
$3^2 = x^2 - 16 \Rightarrow 9 + 16 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$

De ambas soluciones debe descartarse x = -5 por no verificar la ecuación original dado que se obtienen logaritmos de argumento negativo, sin solución. Entonces: **S = {5}**

3) $\log(2x+1) = \log(x+3)$
Como en una función logarítmica, dos valores distintos del dominio siempre tienen imágenes distintas, en la ecuación, los logaritmos de igual base sólo pueden ser iguales si los argumentos lo son: $2x + 1 = x + 3 \Rightarrow$ **x = 2**

4) $\log_2 x - \log_4 x = 1$
Como hay logaritmos de distinta base, es necesario aplicar cambio de base en alguno de los logaritmos. En este caso, se reemplazará el de base 4 por: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$

Volviendo a la ecuación:
$\log_2 x - \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Rightarrow \log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 x = 1 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow 2^2 = x \Rightarrow$
x = 4

Unidad 6

Actividad 1:

Una población de bacterias está en un medio tal que se reproduce duplicándose cada tres horas. En el momento en que se comienza la observación existían 5000 bacterias; al cabo de tres horas, 10000; a las nueve horas, 40000; y así sucesivamente.

Suponiendo su reproducción en forma continua, grafica dichos valores completando previamente la siguiente tabla:

tiempo	cantidad
0	
3	
6	
9	

Como estas bacterias se duplican cada tres horas, ¿cuántas habrá a las 12 horas?, ¿y cuántas había 3, 6 y 9 horas antes?

Completa con estos valores la tabla y agrega en el gráfico.

tiempo	cantidad
12	
-3	
-6	
-9	

a) ¿Cuál es el valor de a? ....

b) Entonces y = ...

c) ¿En cuánto tiempo habrá 160000 bacterias?.

Actividad 2:

Representa gráficamente las siguientes funciones de la forma $y = a^x$; $a>0$:

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = 1^x$ d) $y = e^x$

Determina dominio e imagen.

Actividad 3:

De la observación de los gráficos anteriores:

a) Tacha lo que no corresponda:

- Si a = 1 la función es
  creciente
  decreciente
  constante

creciente

- Para $a > 1$ la función es decreciente
  constante

  creciente
- Para $0 < a < 1$ la función es decreciente
  constante

b) Completa :

- Las curvas exponenciales de la forma $y = a^x$, $a \in IR^+ - \{1\}$, cortan al eje y en el

  punto (........ ;.........) ¿y al eje x? ....

- $y = a^x$ es simétrica de y = ...

- Si $a > 1$, Dom. f = ... y la Im f =.......................

- Si $0 < a < 1$, Dom. f = ... y la Im f = ...

Actividad 4 :

Representa en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones exponenciales de la forma $y = k \cdot a^x$:

i) $y = 2 \cdot 2^x$ ii) $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ iii)$y = -2 \cdot 2^x$ iv) $y = -\frac{1}{2} \cdot 2^x$

a) Halla el dominio y la imagen de estas funciones.
b) Completa :
En i) la curva corta al eje y en (......... , ...)
En ii) la curva corta al eje y en (......... , ...)
En iii) la curva corta al eje y en (......... , ...)
En iv) la curva corta al eje y en (......... , ...)
Los gráficos i) y iii) son simétricos con respecto al eje ……..
Los gráficos ii) y iv) son simétricos con respecto al eje ……..
c) En general las curva de la forma $y = k \cdot a^x$ ($k \in IR - \{0\}$; $a \in IR^+ - \{1\}$)
- Cortan al eje y en el punto (......... , ...)
- Para valores opuestos de k, las curvas son simétricas con respecto al eje ……..

Actividad 5 :

Estudiando el crecimiento de un potrillo, se observa que al comenzar la investigación su peso es de 50 kg. Al mes el peso se incrementa en un 20 % o sea alcanza un peso de ....kg. En el segundo mes, se incrementa otro 20 %, el peso es entonces de .... kg.
Grafica y escribe la fórmula representativa de la función.

Actividad 6 :

Calcula el valor de *y* ó de *x*.

a) $y = \log_2 8$ b) $y = \log_7 7$ c) $y = \log_2 \; 1/4$

d) $y = \log_{10} 0{,}001$ e) $\log_2 \; x = 1$ f) $\log_3 x = 0$

Actividad 7:

Representa gráficamente y determina dominio e imagen de la función.

a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_{1/2} x$ c) $y = \ln x$

Actividad 8:

De la observación de los gráficos anteriores:

a) Tacha lo que no corresponda:

Para $a > 1$ la función es creciente / decreciente / constante

Para $0 < a < 1$ la función es creciente / decreciente / constante

b) Completa:
Las funciones logarítmicas cortan al eje x en el punto (.......... ,.........).
¿y al eje y ? ....

$y = \log_a x$ es simétrica de y = ... con respecto al eje x.

Actividad 9:

Completa sobre la línea punteada para que las siguientes proposiciones resulten verdaderas:

a) Si el punto (0,5 ; 4) pertenece a la gráfica de la función exponencial $y = a^x$,

entonces el valor de a es : ....

b) Si $f(x) = k \cdot a^x$; $f(0) = 3$ y $f(3) = 24$, entonces k = ... y

a = ...

c) Si $f(x) = \log_3 (x + 5k)$ y $f(5) = -2$, entonces k = ...

Actividad 10:

Lee atentamente cada una de las siguientes afirmaciones y contesta V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a) Dada la expresión $x = \dfrac{\sqrt[5]{258} \,.\, 3{,}81^3}{39^2 \,.\, \sqrt[4]{7^5}}$ al aplicar las propiedades de la logaritmación

resulta: $\log x = \underline{\;1\;} \log 258 + 3 \log 3{,}81 - 2 \log 39 + \underline{\;5\;} \log 7$ $\square$

5 4

b) Dado $\log x = 3 \log 121 + \log 7{,}8 - (5 \log 1023 + \frac{3}{4} \log 16)$ al expresar x

resulta : $x = \dfrac{121^3 \,.\, 7{,}8}{1023^5 \,.\, \sqrt[4]{16^3}}$ ☐

Actividad 11 :

Utilizando calculadora, encuentra log x, aplicando previamente las propiedades que correspondan. Luego halla el valor de x.

a) $x = \dfrac{2{,}8}{5{,}4 \,.\, 20{,}5}$ b) $x = \sqrt{73{,}2}$ c) $x = \sqrt[4]{\dfrac{8{,}2 \,.\, 2{,}5^2}{31{,}7}}$

Actividad 12 :

¿Cuál es el valor de x? No utilizar calculadora.

a) $x = \log 25 + \log 4$ b) $x = \log \dfrac{1}{1000} - \log 0{,}1$

Actividad 13 :

Aplicando definición y/o propiedades de logaritmo, determina x. Verifica los resultados.

a) $\log_3 (2 - 3x) = 1$ b) $\log_2 x^2 = 0$
c) $\log_2 (x^2 + 2) = 0$ d) $\log_2 (x^2 - 4x + 7) = 2$
e) $\log (x + 1) - \log (x + 2) = 0$

Actividad 14 :

Resuelve el sistema:

$\log_2 (x + 2) = 5$
$\log (x + 2y) = 1$

Actividad 15 :

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 0{,}14$ b) $10^{2x-1} = 10^{1-x}$

c) $2^{-3x+1} = 5$ d) $4^{x^2 - \frac{3}{2}x - 1} = 1$

Actividad 16 :

Escribe V ó F. En caso de responder Falso , completa sobre la línea punteada la expresión que sustituya la recuadrada, para que la proposición resulte verdadera.

a) Dada la expresión $x = \frac{\sqrt[5]{8,35\ .\ 12,8}}{\left(0,82\ :\ 5\right)^3}$, entonces :

$\boxed{\log x = \frac{1}{5} \log 8,35 + \log 12,8 - 3 \log 0,82 - \log 5}$ …………..

....

b) Si $x = a^3 . \sqrt{a}$, entonces $\boxed{\log_a x = \frac{3}{2}}$ ....

....

c) Si a y b son dos números naturales que satisfacen que a = 2 . b y $\left(\frac{a}{b}\right)^{5x-1} = 256$, entonces $\boxed{x = -\frac{7}{5}}$ ....

....

Actividad 17:

Resuelve los siguientes problemas :

a) Un caso especial de la ley de Newton sobre la rapidez con que se enfría un cuerpo caliente es $100 = 50 . e^{-0,25\,r}$. Encontrar r.

b) La población N(t) (en millones) de Estados Unidos t años después de 1980 se puede aproximar mediante la fórmula $N(t) = 227. e^{0,007.t}$ ¿Cuándo será la población el doble de lo que era en 1980?.

c) Se pone un recipiente con agua a hervir y luego se retira del fuego, se lo coloca a temperatura ambiente (20 ° C). El agua se va enfriando a medida que transcurre el tiempo. La función que describe este fenómeno es la siguiente: $T = 20 + 80 . e^{-0,41.t}$ donde T es la temperatura del agua en °C y t el tiempo que transcurre en minutos. a) ¿Cuál es la temperatura del agua en el instante inicial ?. b) En qué momento se midió una temperatura de 30°C?.

Actividad 18:

Graficar la función $f(x) = \begin{cases} 2.3^x & \text{si } x \in (-\infty;1] \\ 11-5x & \text{si } x \in (1;2) \\ \log_2 x & \text{si } x \in [2;\infty) \end{cases}$

Completar sobre las líneas punteadas:

Dom f =………….. Im f = ………….. C_0 = ……….. C_+ = ……… C_- = ...

Intervalos de crecimiento = ……………….. Intervalos de decrecimiento = ……………

Ecuaciones de las rectas asíntotas : ………………………………

Actividad 19:

Escribir la fórmula y graficar una función por tramos que cumpla todas las condiciones siguientes:

- Para $x \leq 1$, es de la forma $y = k \cdot a^x$, y pasa por los puntos (0 ; ½) y (–1 ; ¼)
- Para $x > 1$, es de la forma $y = \log_b (x - a)$, f (4) = 1 y f (10) = 2

Hallar dominio, imagen, C_0, C_+, C_-, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas.

Claves de corrección

Unidad 6

Actividad 1:

tiempo	cantidad
	5000 10000 20000 40000

tiempo	cantidad
	80000 2500 1250 625

a) $a = \sqrt[3]{2}$

b) $y = 5000 \cdot (\sqrt[3]{2})^x$

c) en 15 horas.

Actividad 2:

a) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = IR^+$
b) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = IR^+$
c) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = \{1\}$
d) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = IR^+$

Actividad 3:

a)
- constante
- creciente
- decreciente

b)
- (0 , 1) ; no corta al eje x
- $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- IR ; IR^+
- IR ; IR^+

Actividad 4:

a) i) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = IR^+$
ii) Dom $f(x) = IR$; Im $f(x) = IR^+$

iii) Dom f (x) = IR ; Im f (x) = IR^-
iv) Dom f (x) = IR ; Im f (x) = IR^-

b) i) (0 , 2) ii) (0 , 1/2) iii) (0 , - 2) iv) (0 , -1/2)
i) y iii) simétricos respecto al eje x ; ii) y iv) simétricos respecto al eje x
c) (o , k) eje x

Actividad 5: 60 Kg ; 72 Kg ; $y = 50 . \left(\frac{6}{5}\right)^x$

Actividad 6: a) y = 3 b) y = 1 c) y = - 2
d) y = - 3 e) x = 2 f) x = 1

Actividad 7: a) Dom f (x) = IR^+ ; Im f (x) = IR
b) Dom f (x) = IR^+ ; Im f (x) = IR
c) Dom f (x) = IR^+ ; Im f (x) = IR

Actividad 8:
a) creciente
decreciente
b) (1 , 0) ; no lo corta , es asíntota.

Actividad 9:
a) a = 16
b) k = 3 y a = 2
c) $k = -\frac{44}{45}$

Actividad 10:
a) $\boxed{F}$ b) $\boxed{V}$

Actividad 11:
a) log x = - 1,597 x = 0,0253
b) log x = 0,932 x = 8,5557
c) log x = 0,052 x = 1,1276

Actividad 12: a) x = 2 b) x = - 2

Actividad 13: a) $x = -\frac{1}{3}$ b) x = 1 ó x = - 1
c) no existe x d) x = 1 ó x = 3
e) no existe x

Actividad 14: $x = 30$; $y = -10$

Actividad 15: a) $x \cong -1,789634$ b) $x = \frac{2}{3}$

c) $x \cong -0,440643$ d) $x = 2$ ó $x = -\frac{1}{2}$

Actividad 16:

a) F $\log x = \frac{1}{5} \log 8{,}35 + \frac{1}{5} \log 12{,}8 - 3 \log 0{,}82 + 3 \log 5$

b) F $\log_a x = \frac{7}{2}$

c) F $x = \frac{9}{5}$

Actividad 17:

a) $r \cong -2,77$
b) En el año 2079 o sea 99 años después.
c) a) 100 ºC b) a los 5 minutos

Actividad 18 :

Dom f = IR Im f = $(0 ; \infty)$

$C_0 = \varnothing$ $C_+ =$ IR $C_- = \varnothing$

I.C = $(-\infty ; 1) \cup (2 ; \infty)$ I. D = $(1 ; 2)$

Asíntota: $y = 0$

Actividad 19 :

Fórmula: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}.2^x & \text{si } x \le 1 \\ \log_3(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dom f = IR Im f = IR

$C_0 = \{ 2 \}$ $C_+ = (-\infty ; 1] \cup (2 ; \infty)$ $C_- = (1 ; 2)$

I.C = $(-\infty ; 1) \cup (1 ; \infty)$ I. D = $\varnothing$

Asíntotas : $y = 0$; $x = 1$

Unidad 7: Funciones trigonométricas

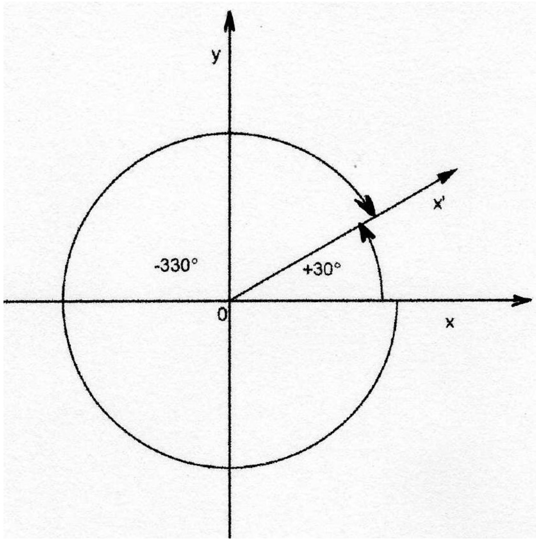
Ángulos y arcos orientados

Dado un sistema de coordenadas cartesianas de origen o, al considerar las rotaciones de la semirrecta $\overrightarrow{ox}$ hay dos sentidos posibles:

- Sentido positivo o antihorario
(ver en el gráfico, el ángulo de +30°)

- Sentido negativo u horario
(ver en el gráfico, el ángulo de -330°)

En ambos ángulos, el de +30° y el de -330°, coinciden los lados inicial ($\overrightarrow{ox}$) y terminal ($\overrightarrow{ox'}$).



Sistemas de medición de ángulos

Es conveniente recordar que medir un ángulo significa comparar su amplitud con la de otro ángulo que se elige como unidad de medida.
Hay varios sistemas de los cuales se utilizarán solo dos: el sexagesimal y el circular.

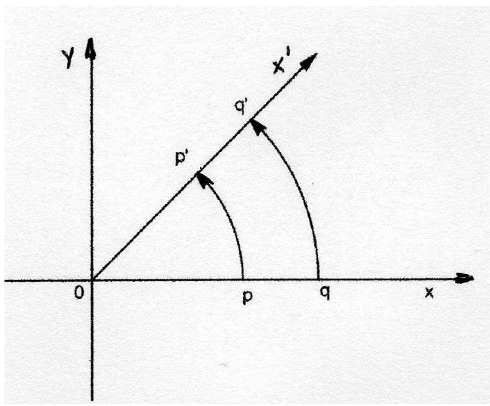
- **Sistema sexagesimal**

Este sistema mide a los ángulos con respecto al *grado sexagesimal* (°) que es el ángulo que resulta de dividir a un ángulo recto en 90 partes iguales. Los submúltiplos son el *minuto sexagesimal* (‘) y el *segundo sexagesimal* (‘‘).
Entonces: 1 R = 90° 1° = 60´ 1’ = 60’’

- **Sistema circular o radial**

El sentido de rotación antes explicitado, además de orientar a los ángulos, orienta a los *arcos* que se generan por cada punto p de la semirrecta $\overrightarrow{ox}$, excepto el origen.
Si p y q son dos puntos cualesquiera de $\overrightarrow{ox}$ la razón entre la longitud del arco pp’ y la del segmento $\overline{op}$ es la misma que la razón entre la longitud del arco qq’ y la del segmento $\overline{oq}$; lo mismo para cualquier otro punto de $\overrightarrow{ox}$.
Es decir:

$$\frac{long\ arco\ pp'}{long\ radio\ op} = \frac{long\ arco\ qq'}{long\ radio\ oq}$$



Así se origina el *sistema circular o radial* de medición de ángulos, según el cual:
“La medida de un ángulo es el número real que se obtiene al efectuar la razón entre la longitud del arco de circunferencia correspondiente y la longitud del radio de la misma”.

La unidad de medida del sistema circular, es el *radián*, que es el arco cuya longitud coincide con el radio de la circunferencia.

Equivalencias entre los sistemas de medición

Sistema sexagesimal	Sistema circular
90°	$\frac{\pi}{2}\,rad \cong 1{,}57\,rad$
180°	$\pi\,rad \cong 3{,}14\,rad$
270°	$\frac{3}{2}\pi\,rad \cong 4{,}71\,rad$
360°	$2\pi\,rad \cong 6{,}28\,rad$

Ej 1: Expresar en sistema circular el ángulo de 102° 30´

180° ---------------- π rad

102° 30' ----------- $\frac{102{,}5°.\pi\ rad}{180°}$ = **1,789 rad**

Ej 2: Expresar en sistema sexagesimal el ángulo de 1 radián

π rad -------------- 180°

1 rad -------------- $\frac{1\,rad.180°}{\pi\ rad}$ =57,295779° = **57° 17' 44''**

Ángulos congruentes

Dos ángulos son congruentes si y sólo si su diferencia es un múltiplo entero de 360° (o de 2π rad).

Simbólicamente: $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} - \hat{\beta} = k.360°\,; k \in Z$ o también

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} - \hat{\beta} = k.2\pi\,; k \in Z$$

Clase de equivalencia: Si 0° ≤ α <360°, la *clase de equivalencia* que él representa y se simbolizará con C_α es

$$C_\alpha = \{\hat{x} \,/\, \hat{x} = \hat{\alpha} + k.360°\,; k \in Z\}$$

Como se definió recién, el ángulo α que siempre es positivo y menor que un giro o nulo; recibe el nombre de *representante de la clase*.

Ej:

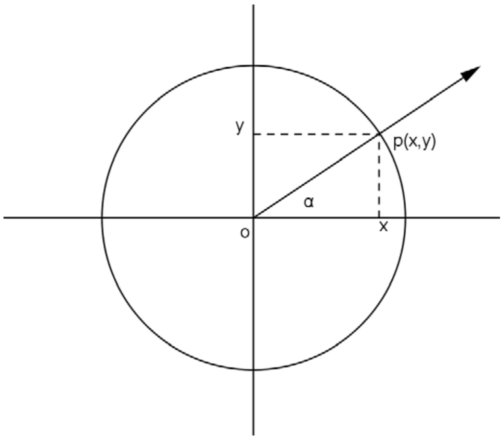
- $C_{15°} = \{\hat{x} \,/\, \hat{x} = 15° + k.360°\,; k \in Z\}$

15° es el representante de esta clase de ángulos. Si consideramos el ángulo de 375° pertenece a $C_{15°}$ dado que para k=1, 375° = 15° + 1. 360°. El ángulo de -1065° también pertenece a esta clase porque para k=-3, -1065°= 15° + (-3).360°

- Los ángulos de $\frac{\pi}{4}\,rad$ y $\frac{9\pi}{4}\,rad$ son congruentes, pues

  $\frac{\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = -\frac{8}{4}\pi = -2\pi = -1.2\pi$, es decir, la diferencia entre ambos es un múltiplo entero de 2π (para k=-1)

Las funciones trigonométricas



En un sistema de coordenadas cartesianas se considera una circunferencia de radio "r" con centro en el origen y un ángulo orientado α (en sentido antihorario). Se observa que α determina sobre la circunferencia un arco de extremo p. Sean (x,y) las coordenadas del punto p, entonces se definen las funciones trigonométricas del ángulo α de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ p}{radio} = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{abscisa\ de\ p}{radio} = \frac{x}{r} \qquad tg\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ p}{abscisa\ de\ p} = \frac{y}{x}$$

$$\cot g\ \alpha = \frac{abscisa\ de\ p}{ordenada\ de\ p} = \frac{x}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{radio}{abscisa\ de\ p} = \frac{r}{x} \qquad \cos ec\ \alpha = \frac{radio}{ordenada\ de\ p} = \frac{r}{y}$$

<u>Caso particular</u>: si se considera la circunferencia de radio r = 1, a la cual se la denomina *circunferencia trigonométrica,* se observa que:

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Entonces: x = cos α e y = sen α de donde se puede decir que las coordenadas del punto p de la circunferencia trigonométrica son (sen α, cos α)

Signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante

Para determinar el signo de las funciones trigonométricas, se debe conocer a qué cuadrante pertenece el ángulo α y los signos de las coordenadas del punto p (x,y).
Por ejemplo, si se considera un ángulo del 2do cuadrante, x<0, y>0 , entonces:
sen α y cosec α resultarán positivos, mientras que las restantes funciones serán negativas.

En resumen:

Cuadrante	$sen\ \alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$	$\cot g\ \alpha$	$\sec\alpha$	$\cos ec\ \alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

- Relación pitagórica: $sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

Despejando: $sen^2\ \alpha = 1 - \cos^2\ \alpha$ $\qquad \cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha$

$$|sen\ \alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad |\cos\alpha| = \sqrt{1-sen^2\alpha}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}; \cos\alpha \neq 0$ $\qquad \cot g\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}; sen\ \alpha \neq 0$
- $tg\ \alpha\,.\cot g\ \alpha = 1$ y despejando:

$tg\ \alpha = \dfrac{1}{\cot g\ \alpha}$; $\cot g\ \alpha \neq 0$ $\qquad$ $\cot g\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$; $tg\ \alpha \neq 0$

- $\cos\alpha . \sec\alpha = 1$ y despejando:

  $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\cos\alpha \neq 0$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$; $\sec\alpha \neq 0$

- $sen\ \alpha . co\sec\alpha = 1$

  $\cos ec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$; $sen\ \alpha \neq 0$ $\qquad$ $sen\ \alpha = \dfrac{1}{\cos ec\ \alpha}$; $\cos ec\ \alpha \neq 0$

Ej: Si se desean calcular las restantes funciones trigonométricas de un ángulo α, sabiendo que $\sec\alpha = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ y que α pertenece al 3er cuadrante, se procede así:

- Primero conviene hallar el coseno, teniendo en cuenta la relación

  $$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = 1 : \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Para calcular el seno, se utiliza la relación pitagórica:

  $|sen\ \alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{1-\dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ y como en el 3er cuadrante el seno es negativo, $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2}$

- Para calcular la tangente, se aplica la relación: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$, entonces:

  $$tg\ \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De manera similar, aplicando las relaciones anteriores, se pueden determinar las funciones trigonométricas restantes (cotangente y cosecante).

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables

	0°(0 rad)	30° ($\frac{\pi}{6}$ rad)	45° ($\frac{\pi}{4}$ rad)	60°($\frac{\pi}{3}$ *rad*)	90°($\frac{\pi}{2}$ rad)
Sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

Aplicando las relaciones anteriores, es posible calcular las funciones que faltan para cada ángulo notable.

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para todo ángulo que intervenga en ella.
Para verificar una identidad trigonométrica, se desarrollan uno o ambos miembros de la misma, tratando de obtener expresiones equivalentes. Para ello se utilizan las operaciones elementales y las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

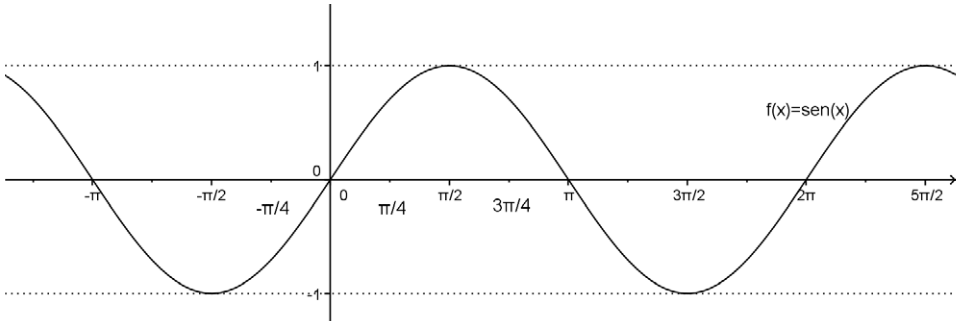
Ej: (sen α + 1).(sen α – 1) = - $\cos^2$ α
sen^2 α – 1 = - $\cos^2$ α
1 – $\cos^2$ α – 1 = - $\cos^2$ α
- $\cos^2$ α = - $\cos^2$ α

Gráficos de las funciones trigonométricas

Como la medida en radianes de un ángulo α es un número real, se definen las funciones trigonométricas para números reales.
Estas funciones son *periódicas*, lo cual significa que existe un número real p>0 (llamado período) tal que para x є dom f , se cumple que: f(x) = f(x+p)

Función seno

Sea f: IR → IR / f(x) = sen x, su gráfico es:

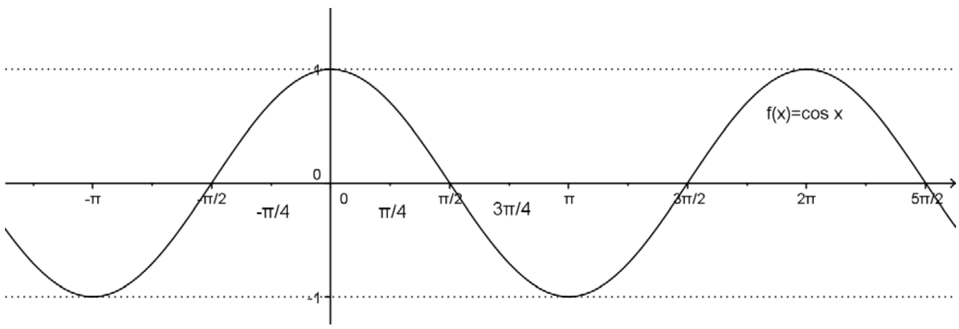


Se observan las siguientes características:

- Dom f = IR
- Im f = [-1,1]
- Periódica y su período es p = 2π (en general: sen x = sen (x+2π), k є Z)
- Continua para todo su dominio
- No es inyectiva, suryectiva, ni biyectiva.
- C_0 = { x є IR / x = kπ, k є Z}

Función coseno

Sea f: IR → IR / f(x) = cos x, su gráfico es:



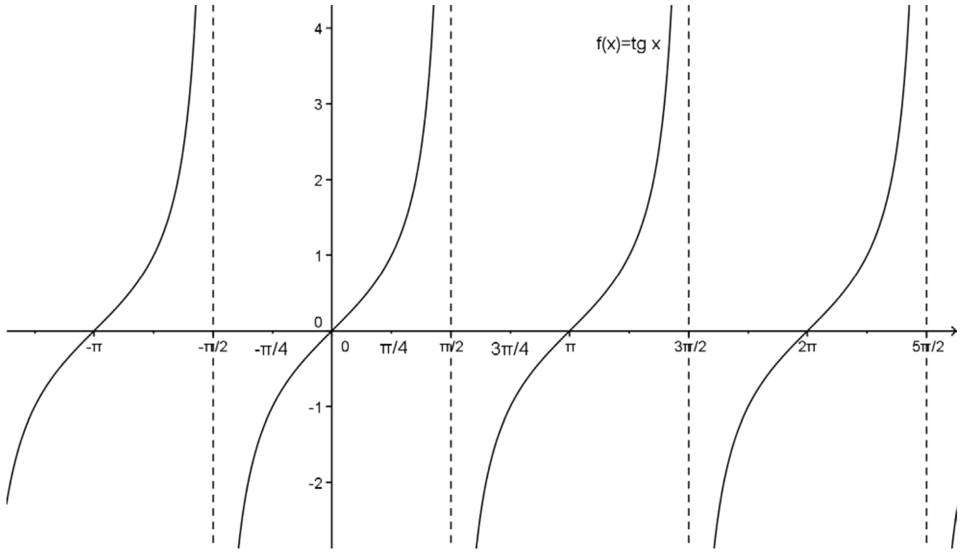
Se observan las siguientes características:

- Dom f = IR
- Im f = [-1,1]
- Periódica y su período es p = 2π (en general: cos x = cos (x+2π), k є Z)
- Continua para todo su dominio
- No es inyectiva, suryectiva, ni biyectiva.

- $C_0 = \{x \in IR \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

<u>Función tangente</u>

Sea f: IR – $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ $\rightarrow$ IR / f(x) = tg x, su gráfico es:



Se observan las siguientes características:

- Dom f = IR – $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$
- Im f = IR
- Periódica y su período es p = π (en general: tg x = tg (x+π), k є Z)
- Presenta discontinuidades en x є $C_{\frac{\pi}{2}} U C_{\frac{3\pi}{2}}$
- No es inyectiva, suryectiva, ni biyectiva.
- $C_0 = \{x \in IR \,/\, x = k\pi, k \in Z\}$

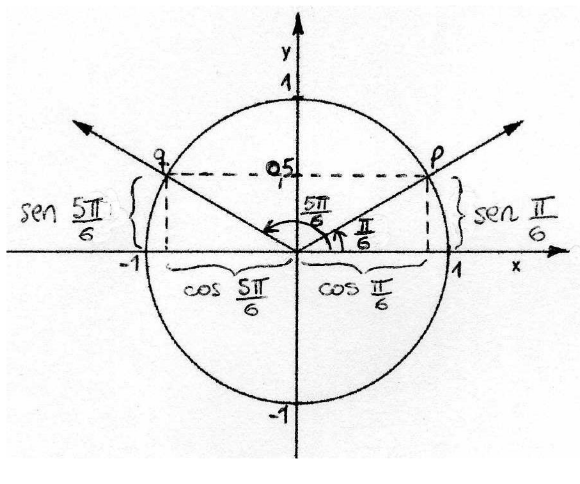
<u>Relaciones trigonométricas inversas</u>

A la relación inversa de f(x) = sen x se la llama *arco seno de x* y se la simboliza:
arc sen x = sen^{-1} x.
Lo mismo para las otras funciones trigonométricas.

Ej: Si se considera $0 \le x < 2\pi,$ y se desea buscar un ángulo tal que su seno resulte igual a 0,5 se observa que:

$sen\frac{\pi}{6} = 0{,}5$ entonces $\frac{\pi}{6}$ = arc sen 0,5

Pero $\frac{\pi}{6}$ no es el único ángulo al cual le corresponde ese valor del seno, dado que el seno también es positivo en el segundo cuadrante, luego hay otro ángulo (en el primer giro como se pide) cuyo seno también es igual a 0,5.
En el gráfico de la derecha se dibujó la circunferencia trigonométrica y los ángulos $\frac{\pi}{6}$ (30°) y $\frac{5\pi}{6}$ (150°).



El valor del sen $\frac{\pi}{6}$ coincide con la ordenada del punto p de la circunferencia trigonométrica y el valor del sen $\frac{5\pi}{6}$ coincide con la ordenada del punto q de la circunferencia trigonométrica y se cumple que:

sen $\frac{\pi}{6}$ = sen $\frac{5\pi}{6}$ = 0,5

En el mismo gráfico se aprecia que los *segmentos representativos* de cos $\frac{\pi}{6}$ y cos $\frac{5\pi}{6}$ (valores de abscisa de p y q respectivamente) son números opuestos:

cos $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y cos $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Con estas dos funciones pueden deducirse las restantes para ambos ángulos.

Ecuaciones trigonométricas

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar, si existen, el o los valores angulares que la verifican.

Ej 1: Hallar x є [0, $\frac{\pi}{2}$] tal que tg x – 1 = 0

Despejando tg x: tg x = 1

x = arc tg 1

El único ángulo del 1er cuadrante que cumple esta condición es $\frac{\pi}{4}$ (ver tabla de ángulos notables o hallar con calculadora científica). Entonces S = { $\frac{\pi}{4}$ }

Ej 2: Encontrar x є [0,2π) que verifiquen: $2\cos^2 x - \cos x = 1$

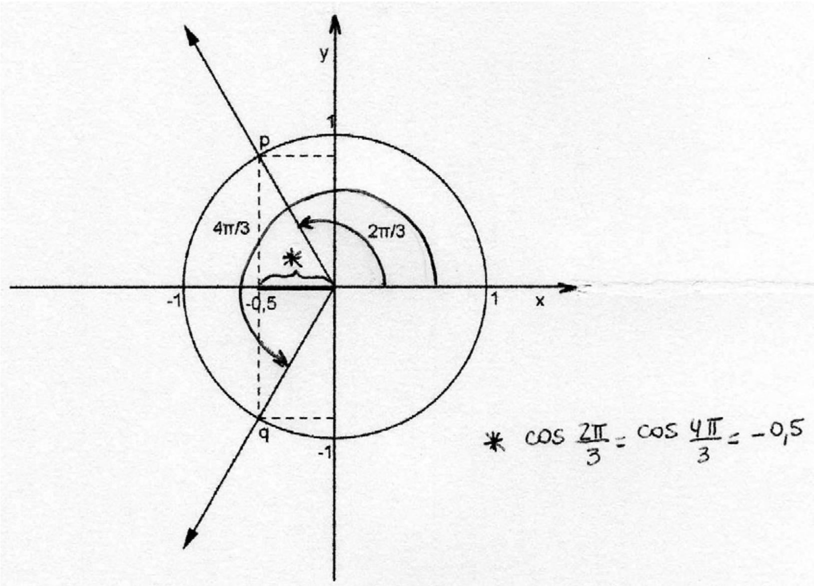
$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Aplicando fórmula resolverte, se llega a que: 1) cos x = 1 ó 2) cos x = $-\frac{1}{2}$

1) x = arc cos 1 $\Rightarrow$ x = 0

2) x = arc cos ($-\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ hay que tener en cuenta que el coseno es negativo en el segundo y en el tercer cuadrante. Puede verse en el gráfico que los ángulos son $\frac{2\pi}{3}$ *y* $\frac{4\pi}{3}$. Por lo tanto,

S = {0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ }



Ej 3: Hallar todos los ángulos x que verifiquen la ecuación: $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

$$|sen\ x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces hay dos posibilidades: 1) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ó 2) sen x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) El seno es positivo en el primer cuadrante y en el segundo cuadrante. Para hallar el ángulo del primer cuadrante, se resuelve con calculadora la ecuación x = arc sen $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y da por resultado: $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Si se realizara un gráfico similar a los anteriores, se observaría que: para obtener el ángulo del segundo cuadrante cuyo seno es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, se debe realizar el cálculo $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

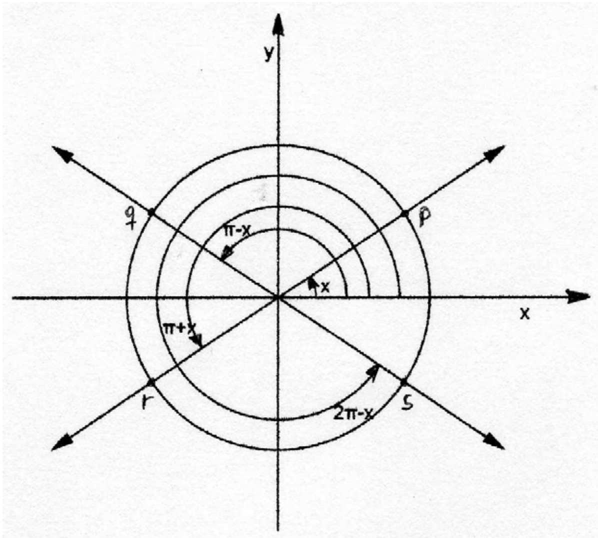
2) El seno es negativo en el tercer y cuarto cuadrante. Para obtener el valor del tercer cuadrante, se puede hacer el cálculo $x_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ y para obtener el valor del cuarto cuadrante, el cálculo es $x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (se podría deducir por observación de gráficos).

Como se pide la solución general, se deben considerar estos cuatro ángulos y todos los de su clase, entonces S = { $C_{\frac{\pi}{3}}; C_{\frac{2\pi}{3}}; C_{\frac{4\pi}{3}}; C_{\frac{5\pi}{3}}$ }

En general:

Dado un ángulo x del primer cuadrante, se pueden tener en cuenta las siguientes relaciones: "el valor de todas las funciones trigonométricas de los ángulos π-x (del segundo cuadrante); π+x (del tercer cuadrante) y 2π-x (del cuarto cuadrante) será el mismo que el del ángulo x del primer cuadrante, pero en valor absoluto".

Las abscisas de los puntos p, q, r y s marcados en la circunferencia trigonométrica del siguiente gráfico, representan al coseno de los ángulos x; π-x; π+x; 2π-x, respectivamente y las ordenadas de dichos puntos, representan al seno de los ángulos x; π-x; π+x; 2π-x, respectivamente.

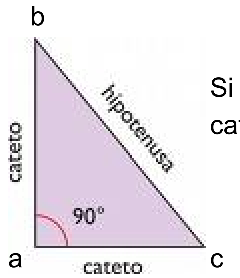


Es decir: p = (cos x , sen x)
q = (cos(π-x) , sen(π-x))
r = (cos(π+x) , sen(π+x))
s = (cos(2π-x) , sen(2π-x))

Desde el gráfico, pueden apreciarse las siguientes relaciones:
- sen (π-x) = sen x   y   cos (π-x) = – cos x
- sen (π+x) = – sen x   y   cos (π+x) = – cos x
- sen (2π-x) = – sen x   y   cos (2π-x) = cos x

A partir de estas relaciones, pueden deducirse las correspondientes a las restantes funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo



Si se considera el ángulo agudo $\hat{c}$, $\overline{ab}$ es su cateto opuesto y $\overline{ac}$ su cateto adyacente. Las funciones trigonométricas de $\hat{c}$ son:

$$sen\ \hat{c} = \frac{cat\ op}{hip} \qquad \cos \hat{c} = \frac{cat\ ady}{hip} \qquad tg\ \hat{c} = \frac{cat\ op}{cat\ ady}$$

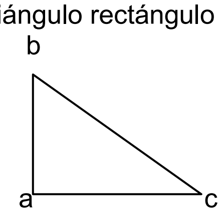
$$\cot g\ \hat{c} = \frac{cat\ ady}{cat\ op} \qquad \sec \hat{c} = \frac{hip}{cat\ ady} \qquad \cos ec\ \hat{c} = \frac{hip}{cat\ op}$$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en averiguar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus ángulos agudos (la medida de uno de sus ángulos es siempre conocida, 90°). Un triángulo rectángulo queda determinado con dos de sus lados o con un lado y uno de sus ángulos agudos.
Se utilizan los siguientes recursos:

- En un triángulo rectángulo, sus ángulos son complementarios.
- Teorema de Pitágoras.
- Definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo.

Ej : De un triángulo rectángulo se sabe que los catetos miden 33m y 21 m. resolver el triángulo.



- Para calcular la hipotenusa ($\overline{bc}$), se emplea el teorema de Pitágoras (en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos):

$\overline{bc}^{\,2}$ = (33m)^2 + (21m)^2 $\Rightarrow$ $\overline{bc}^{\,2}$ = 1530m^2 $\Rightarrow$ $\overline{bc}$ = $+\sqrt{1530\,m^2} \cong 39{,}11\,m$

- Para averiguar la amplitud de cada ángulo, se busca una función trigonométrica que vincule los datos (los dos catetos en este caso) con el ángulo, y es la tangente:

Cálculo de $\hat{c}$: $tg\ \hat{c} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \Rightarrow tg\ \hat{c} = \dfrac{21m}{33m} \Rightarrow tg\ \hat{c} = \dfrac{7}{11} \Rightarrow \hat{c} = arc\ tg\ \dfrac{7}{11}$ = 32° 28’ 16’’

Cálculo de $\hat{b}$: $tg\ \hat{b} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow tg\ \hat{b} = \dfrac{33m}{21m} \Rightarrow tg\ \hat{c} = \dfrac{11}{7} \Rightarrow \hat{b} = arc\ tg\ \dfrac{11}{7}$ = 57° 31’ 44’’

Unidad 7

Actividad 1:

Expresa en radianes:

α = 180 º	β = 90 º	χ = 45 º	δ = 30º
ε = 60 º	ϕ = 120º	γ = 135 º	λ = 270º
μ = 42º 58’	π = 16º 15’20”	ω = 300º 40’20”	

Actividad 2:

Expresa en grados:

$\alpha = \frac{5\pi}{12}$ $\beta = \frac{7\pi}{4}$ γ = 2 rad δ = 2,5 rad φ = 5,8 rad

Actividad 3:

Califica de verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $\frac{\pi}{2}$ y 470° pertenecen a la misma clase de congruencia.

b) -1290° є $C_{\frac{7\pi}{60}}$

c) Los ángulos de 1821° y 381° son congruentes.

d) $C_\pi = \{x \in IR / x = 3k\pi, k \in Z\}$

e) Los ángulos de -30° y -1830° tienen el mismo lado terminal.

f) 793° є $C_{73°}$

Actividad 4:

Aplicando definiciones de las funciones trigonométricas, determinarlas para los ángulos de: 0º 90º 180º 270º

Actividad 5:

a) El lado terminal de un ángulo α, referido a un sistema de coordenadas contiene al punto p (-1,2), graficar el ángulo y aplicando definiciones calcular: sen α, cos α y tg α.

b) El lado terminal de un ángulo α, referido a un sistema de coordenadas contiene al punto p (3 , - 1), graficar el ángulo y aplicando definiciones calcular todas las funciones trigonométricas de α.

Actividad 6:

Indicar si son verdaderas (V) o falsas (F), las siguientes afirmaciones:

a) $\cos 60° = \operatorname{sen} 30°$	☐	b) $\cos^2 30° = -1 + \operatorname{sen}^2 30°$	☐
c) $\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 30° = 1$	☐	d) $\operatorname{tg} 30° = \operatorname{sen} 30° : \cos 30°$	☐
e) $\cos 60° + \cos 30° = \cos 90°$	☐	f) $(1 - \cos 30°)^2 = 1 - \cos^2 30°$	☐

Actividad 7:

Calcular las restantes funciones trigonométricas de α, si:

a) $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$

c) $\cos \alpha = \dfrac{-4\sqrt{3}}{7}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Actividad 8:

a) Calcular tg α, si $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{2}{3}$ y α pertenece al tercer cuadrante.

b) Calcular sec α, si $\cos \alpha = \dfrac{-2\sqrt{2}}{5}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$

Actividad 9:

Verificar las identidades en $\Re$:

a) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2. \operatorname{sen} x. \cos x$

b) $(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2$

c) $\cos^4 x + \cos^2 x . \operatorname{sen}^2 x = (1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)$

d) $(1 - \cos^2 x) . (1 + \operatorname{tg}^2 x) . \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x$

e) $1 - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\cos x}{\sec x} . \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{\sec^2 x - 1}\right]$

f) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sec x . \cos x - \dfrac{1}{\sec^2 x}$.

g) $\dfrac{1}{1 - \text{sen } x} + \dfrac{1}{1 + \text{sen } x} = 2 \,.\, \sec x \,.\, \dfrac{1}{\cos x}$

h) $\dfrac{\sec x + \text{cosec } x}{\text{tg } x + \text{cotg } x} = 1 + \cos x - \dfrac{\cos^2 x}{1 + \text{sen } x}$

Actividad 10:

Calcular, utilizando tabla nemotécnica, el valor de x $\in \Re$:

a) $x = (2 \text{ sen } 45º - \text{tg } 60º)^2$

b) $x = \dfrac{\cos 90º + \text{sen } 90º}{\text{sen } 60º \,.\, \text{sen } 30º - 2}$

c) $x = \sec 45º + \text{cosec } 30º\, \pi - \text{cotg } 30º \,.\, \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Actividad 11:

Expresar por extensión los conjuntos siguientes, si es posible.

a) $\{ x \in \Re \,/\, x = \text{arc sen } 0 ,\ 0 \le x \le 2\pi \}$
b) $\{ x \in \Re \,/\, x = \text{arc sen } 2 \}$
c) $\{ x \in \Re \,/\, x = \text{arc tg } 1,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \}$
d) $\{ x \in \Re \,/\, x = \text{arc sen } ½ ,\ 0 \le x \le 2\pi \}$

Actividad 12:

Resolver las siguientes ecuaciones :

i) si $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ ii) si $0 \le x < 2\pi$

a) $2 \,.\, \text{sen } x = \sqrt{3}$ b) $\cos x = 1 - \cos x$ c) $\sqrt{2} \,.\, \text{sen } x = 1$
d) $5 \,.\, \cos x = 0$ e) $\text{tg } x = 5 - 4 \text{ tg } x$ f) $\text{sen } x = - \text{sen } x$
g) $2\text{sen}^2 x = 1$ h) $\cos^2 x - 0{,}5 \cos x = 0$ i) $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$
j) $\text{sen } 2x = 1$

Actividad 13:

Resolver las siguientes ecuaciones:

i) si $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ ii) si $x \in [0, 2\pi)$

a) $\text{tg } x \,.\, \text{sen } x.\ \sec x + 2 = 3$ b) $3 \cos x - 2 \text{ sen}^2 x + 3 = 0$
c) $\cos^2 x + 2 \text{ sen}^2 x = \dfrac{7}{4}$ d) $1 + \text{sen } x = \cos x$

Actividad 14 :

Determinar:

a) sen 27º 19’	b) sen 72º 5’	c) cos 33º 52’	d) tg 63º 33’
e) sen 60º 45’ 20”	f) cos 60º 45’ 20”	g) tg 30º 40’15”	h) cotg 59º 15’ 28”

Actividad 15:

Determinar x, si:

a) sen x = 0,15204	b) cos x = 0,57	c) sen x = 0,51215
d) cos x = 0,8	e) tg x = 2,6119	f) cotg x = 0,80922

Actividad 16:

Completar sobre la línea punteada:

a) Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ y $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, entonces tg x = ...(no utilizar expresiones decimales).

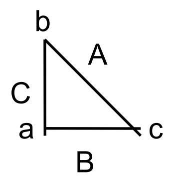
b) Si $x \in \left[\, 0 \,,\, \dfrac{\pi}{2} \,\right]$, el conjunto solución de la ecuación $\cos^2 x = \dfrac{1}{2 \sec x}$

es S = ...

Actividad 17:

Resolver, siendo

bâc rectángulo en a.



a) A = 54 cm b = 25º 6’	b) B = 5,47 cm c = 54º 56’	c) A = 8 m B = 6,5 m	d) A = 15 cm C = 12 cm

Actividad 18:

Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) En un triángulo rectángulo un ángulo mide 60º y el cateto opuesto mide 3 cm. Hallar su perímetro.
b) Hallar el área de un triángulo rectángulo, en el cual un ángulo agudo mide 30º y la hipotenusa mide 4 cm.
c) Calcular la longitud de la sombra que arroja un mástil de 11 m de altura cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 20º.
d) Para construir una escuadra de madera, si uno de sus ángulos debe medir 30º, ¿qué relación guardan los lados entre sí?
e) Cuando se apoya una escalera de 3m de largo en una de las paredes de un pasillo, llega a una altura de 2,50 m. Sin cambiar su apoyo, si se la inclina sobre la otra pared llega a 2 m de altura. Calcular el ancho del pasillo.

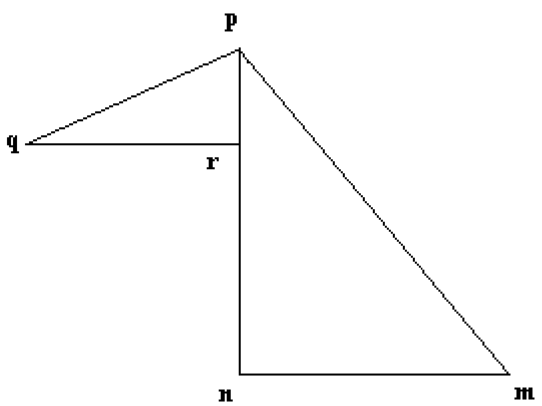
f) Calcular las medidas del lado y de la apotema de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio igual a 8 cm.
g) Calcular la medida del radio de una circunferencia, si un pentágono regular inscripto en ella tiene por apotema un segmento de longitud aproximada a 2,36 cm.
h) Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de los catetos es el duplo del otro. ¿Puede calcularse la hipotenusa con esos datos?
i) Un árbol quebrado por el viento forma un ángulo recto con el suelo.Si la parte quebrada forma un ángulo de 32° con el piso y la distancia de la punta hasta la raíz del tronco es de 3 m .¿Qué altura tenía el árbol?. Realizar un esquema gráfico.Trabajar con $\varepsilon < 0,00001$.
j) Calcular los ángulos agudos que determinan el cable de una antena de radio, si la longitud de dicho cable es un 40% más largo que la altura de la antena. Realizar un esquema gráfico.
k) En una escalera de dos brazos cada uno de ellos mide 2,2 m , si ella está totalmente abierta llega a una altura de 180 cm.. En estas condiciones , a) ¿Cuál es el ángulo que forman ambos brazos ?.b) ¿Cuál es la distancia entre ellos al estar apoyada en el piso?. ($\varepsilon < 0,00001$) .
l) Un octógono regular inscripto en una circunferencia posee una apotema de 6 cm . Calcular el diámetro de dicha circunferencia y el perímetro de dicho polígono. ($\varepsilon < 0,001$).

Actividad 19:

Plantear y resolver el siguiente problema :

Sabiendo que pnm y prq son triángulos rectángulos en $\hat{n}$ y $\hat{r}$ respectivamente, y que :

ampl $\hat{m}$ = 32ª 18`'
long $\overline{mn}$ = 15 cm
long $\overline{pq}$ = 7 cm
long $\overline{nr}$ = 6,2 cm



Encuentra : a) La amplitud del ángulo $\hat{q}$

b) El área del triángulo mnp.

Claves de corrección

Unidad 7

Actividad 1: $\alpha = \pi$ $\quad \beta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \chi = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \delta = \dfrac{\pi}{6}$

$\varepsilon = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \phi = \dfrac{2}{3}\pi$ $\quad \gamma = \dfrac{3}{4}\pi$ $\quad \lambda = \dfrac{3}{2}\pi$

$\mu = 0{,}749909801$ $\quad \pi = 0{,}283712966$ $\quad \omega = 5{,}247720247$

Actividad 2:

$\alpha = 75^{\circ}$ $\quad \beta = 315^{\circ}$ $\quad \gamma = 114^{\circ}\ 35'\ 30''$ $\quad \delta = 143^{\circ}\ 14'\ 22''$ $\quad \psi = 332^{\circ}\ 18'\ 56''$

Actividad 3:

a) F b) F c) V d) F e) V f) V

Actividad 4:

F. trig. / α	sen α	cos α	tg α	cotg α	sec α	cosec α
0 º	0	1	0	No está definida	1	No está definida
90 º	1	0	No está definida	0	No está definida	1
180 º	0	- 1	0	No está definida	- 1	No está definida
270 º	- 1	0	No está definida	0	No está definida	- 1

Actividad 5: a) sen $\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ cos $\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ tg α = - 2

b) sen $\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ $\quad$ cos $\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ $\quad$ tg $\alpha = -\dfrac{1}{3}$

cotg α = - 3 $\quad$ sec $\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ $\quad$ cosec $\alpha = -\sqrt{10}$

Actividad 6: a) $\boxed{V}$ b) $\boxed{F}$
c) $\boxed{V}$ d) $\boxed{V}$
e) $\boxed{F}$ f) $\boxed{F}$

Actividad 7: a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{5}{3}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{4}$

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{2}$ $\quad$ $\sec\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{7}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\operatorname{cotg}\alpha = -4\sqrt{3}$ $\quad$ $\sec\alpha = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = 7$

Actividad 8: a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ b) $\sec\alpha = -\frac{5\sqrt{2}}{4}$

Actividad 10: a) $x = 5 - 2\sqrt{6}$ $\quad$ b) $x = \frac{-4\sqrt{3} - 32}{61}$ $\quad$ c) $x = 2\pi$

Actividad 11: a) $\{0, \pi, 2\pi\}$ b) $\{\ \}$ c) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}$

Actividad 12:

i) a) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ $\qquad$ ii) a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ $\qquad$ b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$

c) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ c) $\left\{ \frac{\pi}{4} , \frac{3}{4}\pi \right\}$

d) $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ d) $\left\{ \frac{\pi}{2} , \frac{3}{2}\pi \right\}$

e) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ e) $\left\{ \frac{\pi}{4} , \frac{5}{4}\pi \right\}$

f) $\left\{ 0 \right\}$ f) $\left\{ 0 , \pi \right\}$

g) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ g) $\left\{ \frac{\pi}{4} , \frac{3}{4}\pi , \frac{5}{4}\pi , \frac{7}{4}\pi \right\}$

h) $\left\{ \frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{2} \right\}$ h) $\left\{ \frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{2} , \frac{3}{2}\pi , \frac{5}{3}\pi \right\}$

i) $\left\{ 0 \right\}$ i) $\left\{ 0 \right\}$

j) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ j) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

Actividad 13:

i) a) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

b) $\left\{ \quad \right\}$

c) $\left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

d) $\left\{ 0 \right\}$

ii) a) $\left\{ \frac{\pi}{4} , \frac{3}{4}\pi , \frac{5}{4}\pi , \frac{7}{4}\pi \right\}$

b) $\left\{ \pi , \frac{2}{3}\pi , \frac{4}{3}\pi \right\}$

c) $\left\{ \frac{\pi}{3} , \frac{2}{3}\pi , \frac{4}{3}\pi , \frac{5}{3}\pi \right\}$

d) $\left\{ 0 , \frac{3}{2}\pi \right\}$

Actividad 14:

a) 0,458908 b) 0,951505 c) 0,830337 d) 2,010081
e) 0,872543 f) 0,488537 g) 0,593068 h) 0,594754

Actividad 15:

a) 8 º 44 ‘ 43 ‘’ b) 55 º 14 ‘ 59 ‘’ c) 30 º 48 ‘ 26 ‘’

d) 36 º 52 ‘ 12 ‘’ e) 69 º 03 ‘ f) 51 º 01 ‘ 10 ‘’

Actividad 16: a) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ b) $S = \left\{ \dfrac{\pi}{3} \right\}$

Actividad 17: a) c = 64 º 54 ‘   B = 22,9 cm   C = 48,9 cm

b) b = 35 º 4 ‘   A = 9,52 cm   C = 7,79 cm

c) C = 4,66 cm   b = 54 º 20 ‘ 27 ‘’   c = 35 º 39 ‘ 32 ‘’

d) B = 9 cm   b = 36 º 52 ‘ 11 ‘’   c = 53 º 07 ‘ 45 ‘’

Actividad 18:

a) $P = (3 + 3\sqrt{3})$ cm

b) $A = 2\sqrt{3}$

c) La longitud de la sombra es 30,22 m.

d) $B = \dfrac{1}{2} A$; $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} A$

e) El ancho del pasillo es 3,8943 m.

f) $l = 8\sqrt{3}$ cm ; a = 4 cm

g) r = 2,91712 cm.

h) Los ángulos miden 63 º 26 ‘ 06 ‘’ y 26 º 33 ‘ 54 ‘’. Con esos datos no puede calcularse la medida de la hipotenusa.

i) La altura del árbol era de 5,41214 m.

j) Los ángulos miden 45 º 35 ‘ 05 ‘’ y 44 º 24 ‘ 55 ‘’.

k) La distancia es de 2,52982 m.

l) Diámetro = 12,986 cm.   Perímetro = 39,744 cm.

Actividad 19: a) 27 º 57 ‘ 53 ‘’   b) 71,119125

Modelo de Evaluación

Te sugerimos realizar esta actividad una vez finalizada la ejercitación del presente módulo, y su conveniente fijación.
Por supuesto que este modelo de prueba no abarca todos los contenidos, pero puede servirte como guía y como actividad de integración, ya que para resolverlo es conveniente que te sientas como en una situación de examen. Recuerda que se evalúa la interpretación de consignas, la precisión en el desarrollo de los ejercicios y la respuesta correcta. ¡Mucha suerte!

1) Completar sobre las líneas punteadas para que cada proposición resulte verdadera.

1.1) El conjunto solución de la inecuación $2|3-x|-|12-4x| \geq -8$ expresado con intervalos

reales es S = ………………………

1.2) Al aplicar todas las propiedades posibles de la logaritmación a la expresión

$x = \dfrac{\sqrt{3^5}}{2{,}3^7.\sqrt[6]{13}}$ resulta log x = ………………………………………………………

1.3) Si se escribe el polinomio G(x) = 2 x^4 + x^3 – 18 x^2 – 9 x como producto de polinomios

primos, resulta G(x) = ……………………………………………….. y el conjunto de ceros de

G(x) es C_0 = {……………………………

1.4) La recta que pasa por los puntos p = (1 ; -2) y q = (-3 ; 4) también pasa por el punto de

coordenadas (k ; 7) para k =…………

1.5) El conjunto solución de la ecuación $\dfrac{4x^2}{x^2-16} - \dfrac{x+4}{x-4} = \dfrac{4-x}{x+4}$ es S = {……………………

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -3.2^x & \text{si } x \leq 1 \\ -(x-2)^2+1 & \text{si } x \in (1;4) \\ \dfrac{3}{2}x-9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ se pide:

a) Graficarla en un sistema de coordenadas.

b) Completar, por observación del gráfico:

Dom(f)=…………………………..…… Im(f)=……………………………..…

C_0=………………..…. C_+=……………………………. C_- =……………………………

Int. de crecimiento=…………………… Int. de decrecimiento=..………………

f(-3)=………….. f(1)=……………. f(4)=……………..

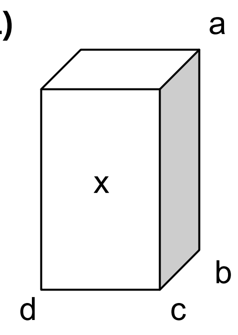
c) Considerando como codominio el conjunto [– 6 ; +∞), **contestar "SI" o "NO"** en las

líneas punteadas, según corresponda:

- ¿ Es f(x) inyectiva ? …………..
- ¿ Es f(x) suryectiva ? …………..
- ¿ Es f(x) biyectiva ? ……………

3) Plantear y resolver analíticamente las siguientes situaciones problemáticas:

3.1)



Calcular sin aproximaciones el valor de "x" (diagonal del prisma), con los siguientes datos:

$\overline{ab} = \sqrt{13}$ cm

$\overline{bc} = \sqrt{3}$ cm

$\overline{dc} = \sqrt{2}$ cm

3.2) Desde el momento que sale de la parada, un colectivo se mueve a medida que transcurre el tiempo según la función $y = 0{,}4\, x^2$. En ese instante una persona observa al colectivo y trata de alcanzarlo, moviéndose según la función $y = 4x – 10$, siendo "x" el tiempo transcurrido en segundos e "y" la distancia recorrida en metros.
Hallar el tiempo que tarda la persona en alcanzar el colectivo y a qué distancia de la parada sucede el encuentro.

4) Plantear y resolver cada uno de los siguientes ítems y **luego recuadrar** la opción correcta:

4.1) La expresión $\cot g\,\alpha - \dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha}$ es equivalente a la expresión:

a) – cotg α **b)** cotg α **c)** – tg α **d)** tg α **e)** ninguna de las anteriores

4.2) El valor que **<u>NO</u>** es solución de la ecuación $1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ es:

a) $\frac{1}{6}\pi$ **b)** $\frac{5}{6}\pi$ **c)** $\frac{5}{3}\pi$ **d)** $\frac{7}{6}\pi$ **e)** ninguna de las anteriores

4.3) Desde una torre se arroja con un ángulo de depresión de 27°, una soga de 15 m de longitud y, al tensarla, su extremo se encuentra de la base de la torre a una distancia aproximada de:

a) 13,37 m **b)** 7,64 m **c)** 29,44 m **d)** 6,83 m **e)** ninguna de las anteriores

4.4) Con los datos del problema anterior, la altura de la torre es de aproximadamente:

a) 13,37 m **b)** 6,81 m **c)** 29,44 m **d)** 7,64 m **e)** ninguna de las anteriores